TE238 - Análise, Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

1^a Lista de Exercícios

Roman Kuiava, Prof. Dr. [a]

[a] *Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Elétrica, Rua Cel. F. H. dos Santos, 100, Jardim das Americas, 81531-980, Curitiba, Brasil.*

- 1) Desenvolva as equações para os circuitos apresentados na Figura 1. Em seguida, obtenha o modelo na forma de espaço de estados. Considere a(s) saida(s) como sendo a(s) corrente(s) no(s) indutor(es) e a(s) tensão(ões) no(s) capacitor(es).

- 2) Um sistema é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + 2\frac{dz(t)}{dt} + 3z(t) = u(t), \tag{1}$$

sendo $u(t)$ a variável de entrada do sistema. Assuma como variáveis de estado $z(t)$ e $\dot{z}(t)$. Dessa forma, o vetor das variáveis de estado $x(t)$ é dado por $x(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t)]^T$, sendo $x_1(t) = z(t)$ e $x_2(t) = \dot{z}(t)$. Considere $x_1(t)$ como sendo a variável de saída. Obtenha o modelo de (1) na forma usual de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

- 3) Considere o seguinte sistema dinâmico de ordem n representado pela equação diferencial:

$$z^{(n)}(t) + a_1 z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{z}(t) + a_n z(t) = u(t), \tag{2}$$

em que $z^{(n)}(t) = \frac{d^n z(t)}{dt^n}$, $z^{(n-1)}(t) = \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}}$, $\cdots$,$\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$.

Assuma como variáveis de estado $z(t)$, $\dot{z}(t)$,..., $z^{(n-1)}(t)$, ou seja:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

sendo $x(t)$ o vetor de variáveis de estado. Na equação (2), $u(t)$ é a variável de entrada. Considere $x_1(t)$ como sendo a variável de saída. Obtenha o modelo de (2) na forma usual de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

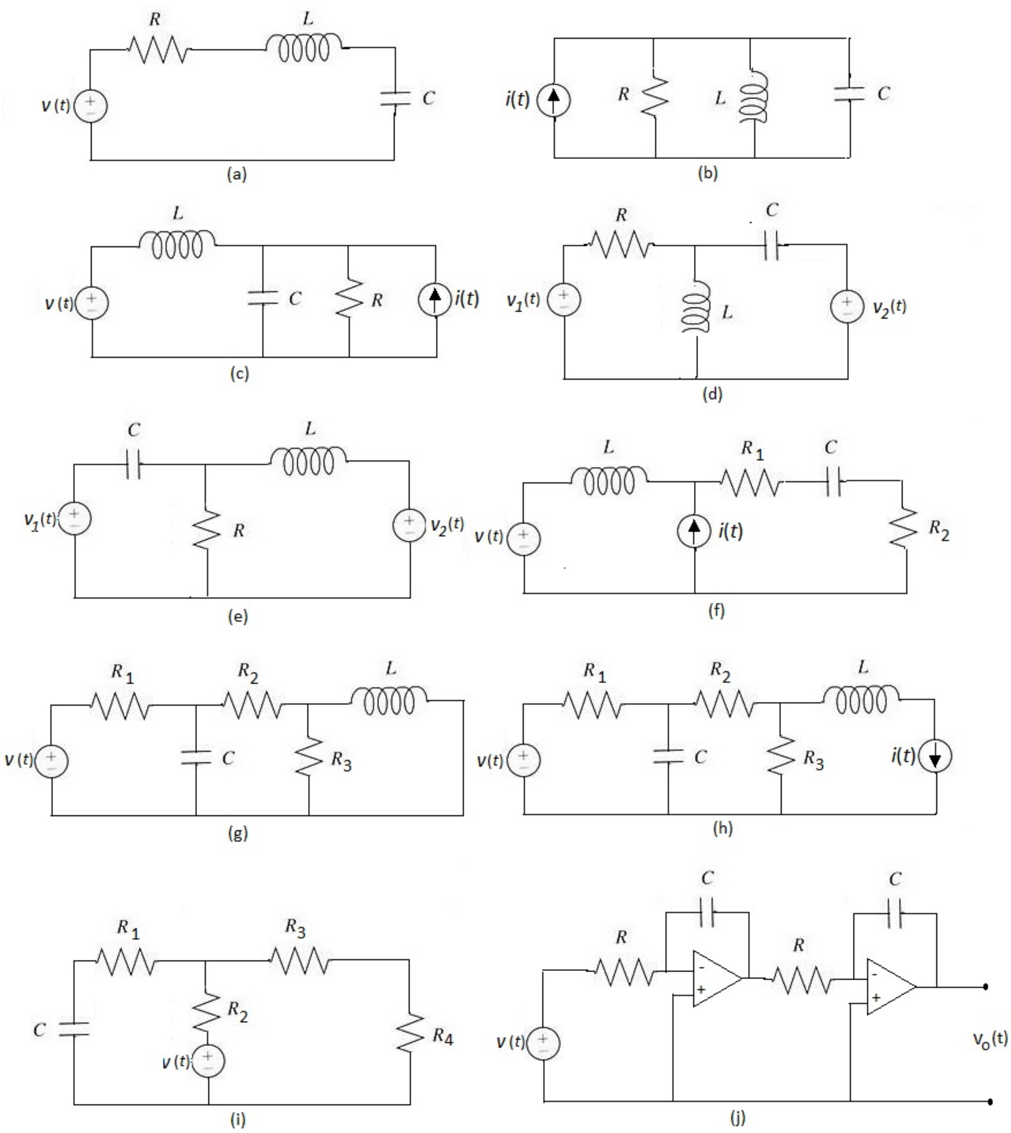

Figure 1.

- 4) Obtenha a função de transferência dos circuitos elétricos (a), (b), (g) e (f) do Exercicio 1.

- 5) Em geral, as representações em espaço de estados não são únicas. Um sistema pode ser representado de diversas formas possíveis. Por exemplo, considere os sistemas a seguir:

  (a) $\dot{x}(t) = -5x(t) + 3u(t), \qquad y(t) = 7x(t).$

  $$(b) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = [7 \ \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

  $$(c) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = [7 \ \ 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

  Mostre que esses sistemas podem ser representados pela mesma função de transferência.

- 6) Obtenha a função de transferência $G(s) = Y(s)/R(s)$ para cada um dos sistemas a seguir representados na forma de espaço de estados:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = [1 \;\; 0 \;\; 0]x(t).$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = [1 \;\; 3 \;\; 6]x(t).$$

- 7) **Baseado em exercício do livro do Nise, página 85**. Muitos sistemas são lineares *por partes*. Isto é, para uma grande faixa de valores de suas variáveis o sistema pode ser descrito como linear. Um sistema que utiliza um amplificador com saturação é um exemplo desse tipo. Dada a equação diferencial

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + 15\frac{dz(t)}{dt} + 50z(t) = f(z(t)),$$

admita que $f(z(t))$ seja uma função como a mostrada na figura abaixo. Escreva a equação diferencial e o modelo na forma de espaço de estados para cada uma das faixas de valores de z: (a) $-\infty < z < -2$; (b) $-2 < z < 2$; (b) $2 < z < \infty$.

- 8) **Baseado em exercício do livro do Nise, página 75**. Considere o circuito elétrico da página 75, livro do Nise. Tal circuito contém um resistor não-linear cuja relação tensão-corrente é definida por $i_r(t) = 2e^{0,1v_r(t)}$, onde i_r e v_r são a corrente e a tensão no resistor, respectivamente. Obtenha: (a) a equação diferencial não-linear de primeira ordem pela aplicação da Lei das Tensões de Kirchoff; (b) o modelo não-linear na forma de espaço de estados, considerando como variável de estado $i(t)$, variável de entrada $v(t)$ e variável de saída como sendo a tensão no resistor.

- 9) A Figura 2 mostra o modelo de um motor de corrente contínua (motor CC) com o qual se deseja movimentar uma carga com momento de inércia J_c através de um eixo com coeficiente de atrito viscoso torcional b. O rotor tem momento de inércia J_m. A carga é movimentada através de duas engrenagens com raios r_m e r_c, respectivamente. O rotor, constituído por um conjunto de espiras, é modelado por um circuito RL série alimentado pela tensão externa $V(t)$, a qual deve ser manipulada de modo à controlar a variável de interesse do sistema (velocidade angular ou posição angular da carga). Assim sendo, o controle é feito pela tensão de armadura, mantendo uma tensão constante aplicada ao rotor da máquina. A tensão aplicada ao enrolamento de armadura é $E(t) = K_1V(t)$, sendo K_1 o ganho do amplificador. O seguinte modelo matemático rege o comportamento dinâmico do rotor:

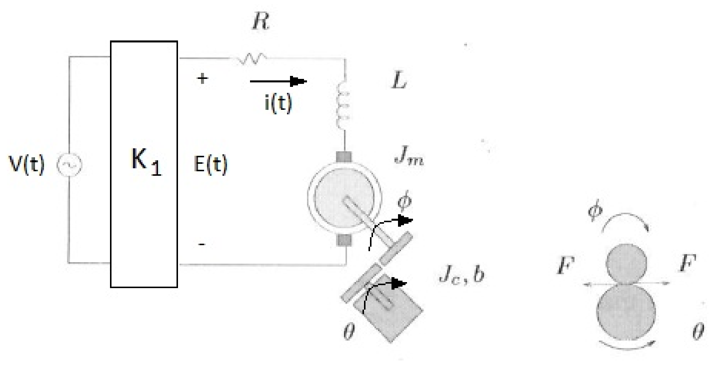

Figure 2. Motor de Corrente Contínua.

Parte elétrica: O circuito RL série fornece:

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) = K_1V(t) - K_2\frac{d}{dt}\phi(t), \tag{3}$$

onde se nota o acoplamento através da velocidade angular do rotor pelo termo $K_2\frac{d}{dt}\phi(t)$, o qual consiste na tensão resultante no entreferro da máquina.

Parte mecânica: O motor gera um torque total $T_{tot} = K_2i(t)$, que é transferido à carga através do rotor. Portanto, obtemos as equações:

$$J_m\frac{d^2}{dt^2}\phi(t) + F_{r_m} = T_{tot}, \quad J_c\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + b\frac{d}{dt}\theta(t) = F_{r_c}, \tag{4}$$

as quais, levando em conta as relações algébricas $r_m\phi(t) = r_c\theta(t)$ e $c = r_c/r_m$, e mais a condição de equilíbrio $F_{r_c} = cF_{r_m}$ permitem determinar o deslocamento angular da carga na forma

$$(J_c + c^2J_m)\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + b\frac{d}{dt}\theta(t) = cK_2i(t), \tag{5}$$

onde se nota o acoplamento através da corrente elétrica que circula no rotor. Levando em consideração na equação (3) a relação $\phi(t) = c\theta(t)$, podemos reescrevê-la como:

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) = K_1V(t) - cK_2\frac{d}{dt}\theta(t), \tag{6}$$

As equações (5) e (6) definem, portanto, o modelo matemático do sistema em estudo no domínio do tempo t, sendo que, a variável de entrada é a tensão $V(t)$ e a variável de saída é a velocidade angular $w(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$ ou a própria posição angular $\theta(t)$ da carga. **Obtenha o modelo na forma de espaço de estados e a função de transferência, considerando a saída como sendo a velocidade angular** $w(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$.