TE231
Capitulo 3 – Sistemas de Equações Lineares;

Prof. Mateus Duarte Teixeira

Sumário

1. Introdução

- Resolvem vários problemas teóricos e práticos:
  - Inteligência artificial: resolução das equações de Bellman;
  - Teoria dos grafos: fluxo factível (caixeiro viajante: simétrico ou assimétrico (trechos percorridos diferentes));
  - Circuitos elétricos: análise de sistemas lineares (forma real e complexa);
  - Teoria de controle: sistemas lineares e a linearização de sistemas não lineares;
  - Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos;

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES LINEARES

A aplicação de equações e sistemas lineares é fundamental na resolução de problemas que envolvem equações com muitas incógnitas. Problemas desse tipo se apresentam por exemplo, na distribuição de energia elétrica, no gerenciamento das linhas de telecomunicações e na logística para transporte de mercadorias em uma região.

Em que situações devemos resolver um sistema de equações?

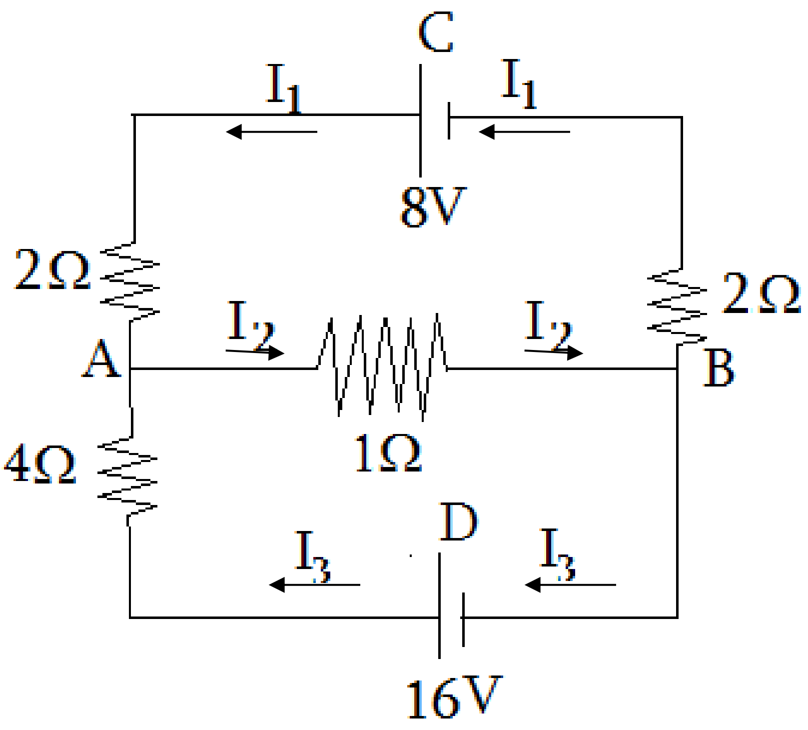
Resolver sistemas de equações é necessário em qualquer estudo onde se pesquise a interação de variáveis em determinado fenômeno ou experimento.

Exemplos:

Circuitos Elétricos:

Descobrir as correntes.

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 4I_1 + I_2 = 8 \\ I_2 + 4I_3 = 16 \end{cases}$$

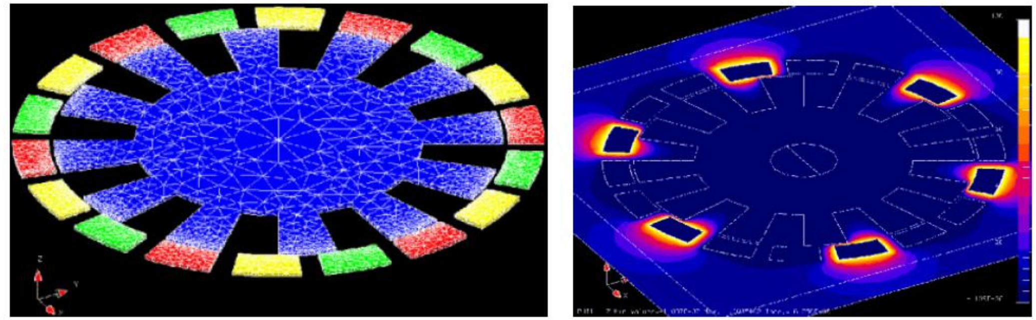


Exemplos:

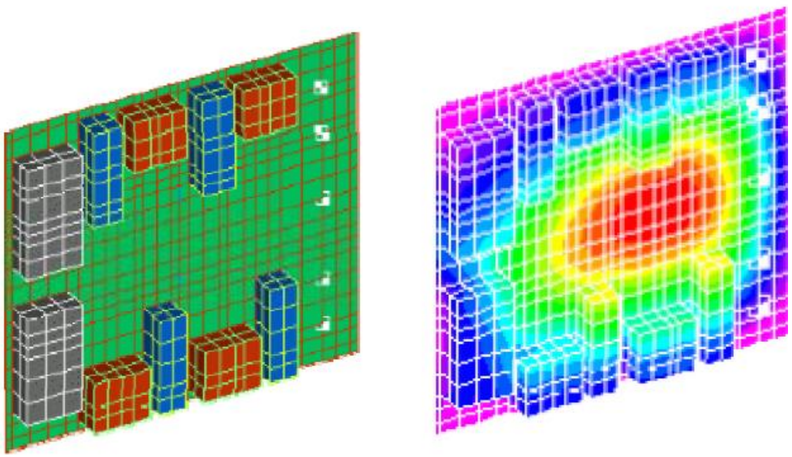
Balanceamento de equações químicas

$$wNH_3 + x\,O_2 \rightarrow yN_2 + zH_2O$$

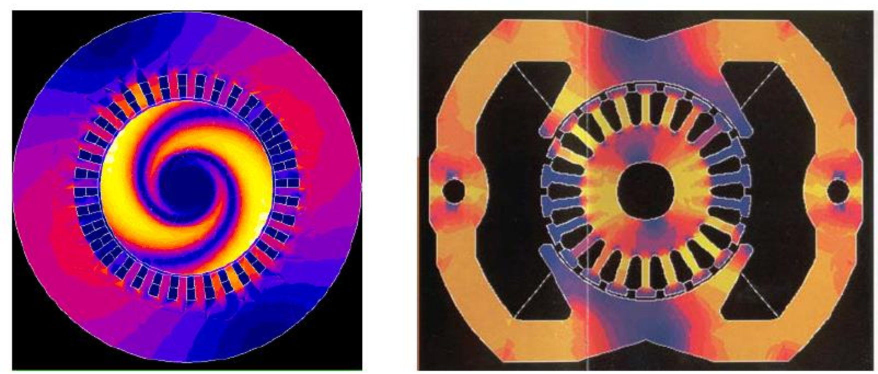
$$\begin{cases} w = 2y \\ 3w = 2z \\ 2x = z \end{cases}$$



Perfis de potencial elétrico no interior do motor eletrostático



Temperaturas em uma placa de circuito eletrônico



Fluxo magnético no interior de um motor elétrico

O que é uma equação linear?

- Equação com certo número de variáveis onde cada termo não pode ter grau diferente de 1.
- Exemplo:
  - $3x + \pi y - 6z + w = \sqrt{2}$
  - $3xy + 5z = 7$

- Produto de duas variáveis de grau 1 tem grau 2.
  - $\frac{1}{x} - 3y + z = 10$

  Equivale x^{-1}, o grau não é 1

Conjunto de equações lineares.

Exemplos:

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

3 equações
3 incógnitas

$$\begin{cases} x + y - 3z + w = 0 \\ x - y + z + 2w = 5 \\ 2x - y - z - w = 3 \end{cases}$$

3 equações
4 incógnitas

$$\begin{cases} x - 2y + z = 8 \\ 3x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - 3z = 13 \end{cases}$$

4 equações
3 incógnitas

Um sistema linear com m equações e
n incógnitas pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

coeficientes	constantes	variáveis
a_{mn}	b_n	x_n

Resolver o sistema linear

Calcular os valores de x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, caso existam, que satisfaçam as m equações.

- Notação matricial: $AX = B$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes.

É o vetor das variáveis

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

É o vetor dos termos independentes

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Consideremos a situação de duas equações e de duas variáveis

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

solução única
retas concorrentes

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

infinitas soluções
retas coincidentes

$$x^* = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 - 2\alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \Re$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

nenhuma solução
retas paralelas

2. Interpretação Geométrica

- Cada equação linear de duas variáveis é a equação de uma reta:

$2x+y=3 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3$ (forma da função afim)

coef. angular a = -2 coef. linear : b = 3

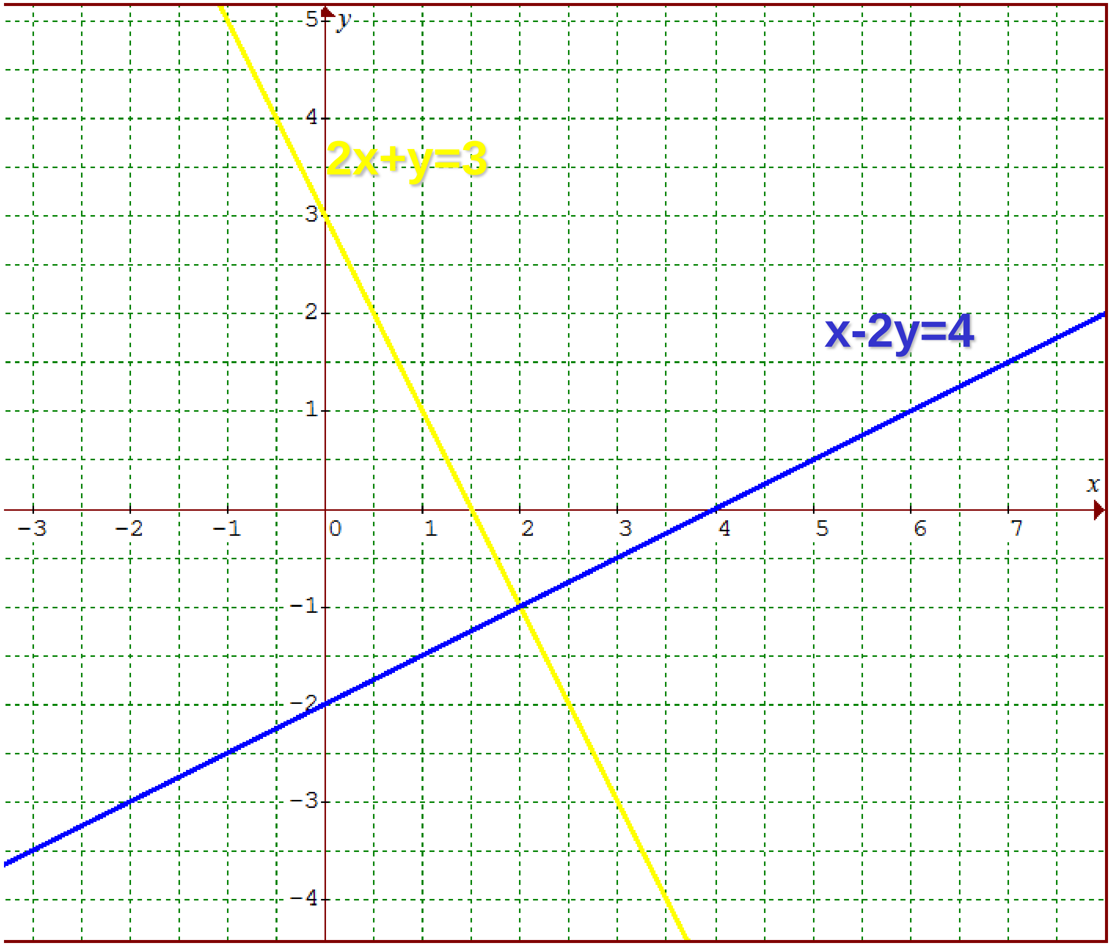
$x - 2y = 4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{2} - 2$

coef. angular $a = \frac{1}{2}$ coef. linear: b = -2;

- Gráficos:

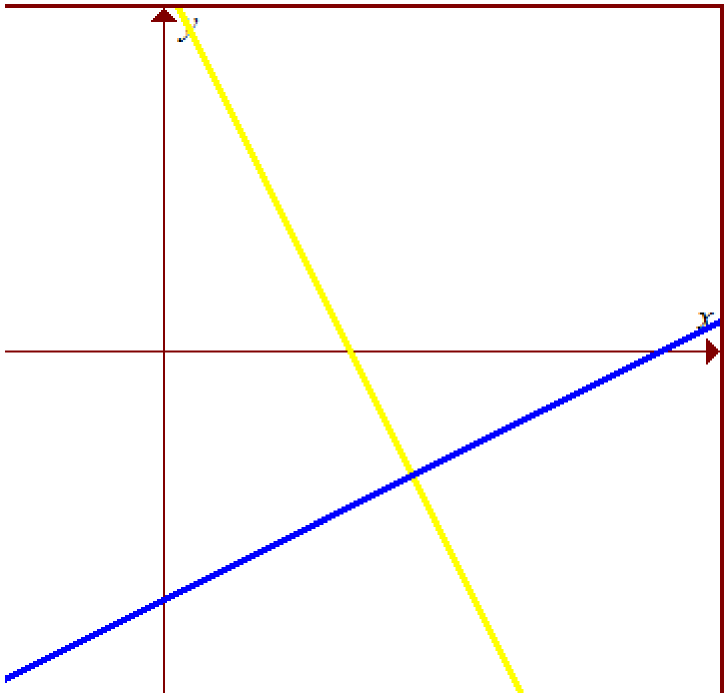
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

S={(2,-1)}



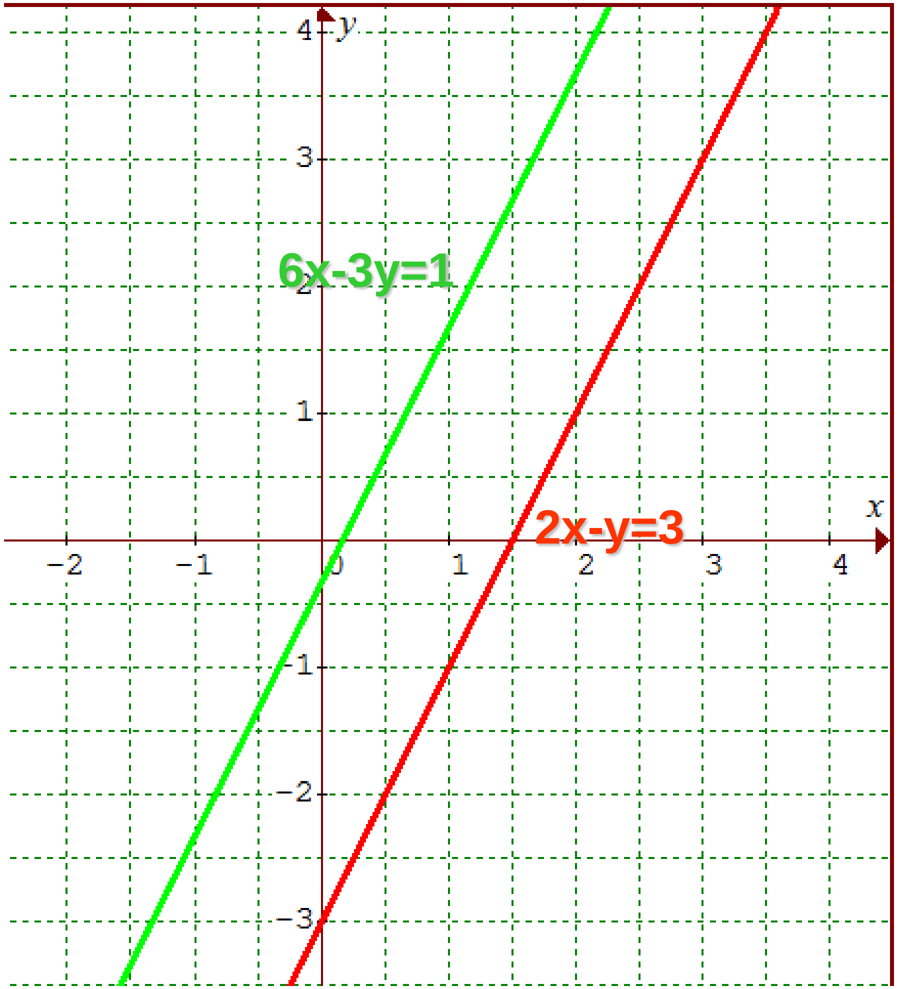
- A solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas é o ponto de intersecção de duas retas representadas por essas equações.

- Vimos um exemplo que as retas possuem um ponto de intersecção , associado ao conjunto solução do sistema: **UMA ÙNICA SOLUÇÃO.**
- Chamamos essa posição de: **RETAS CONCORRENTES**



- Exemplo:

$$\begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

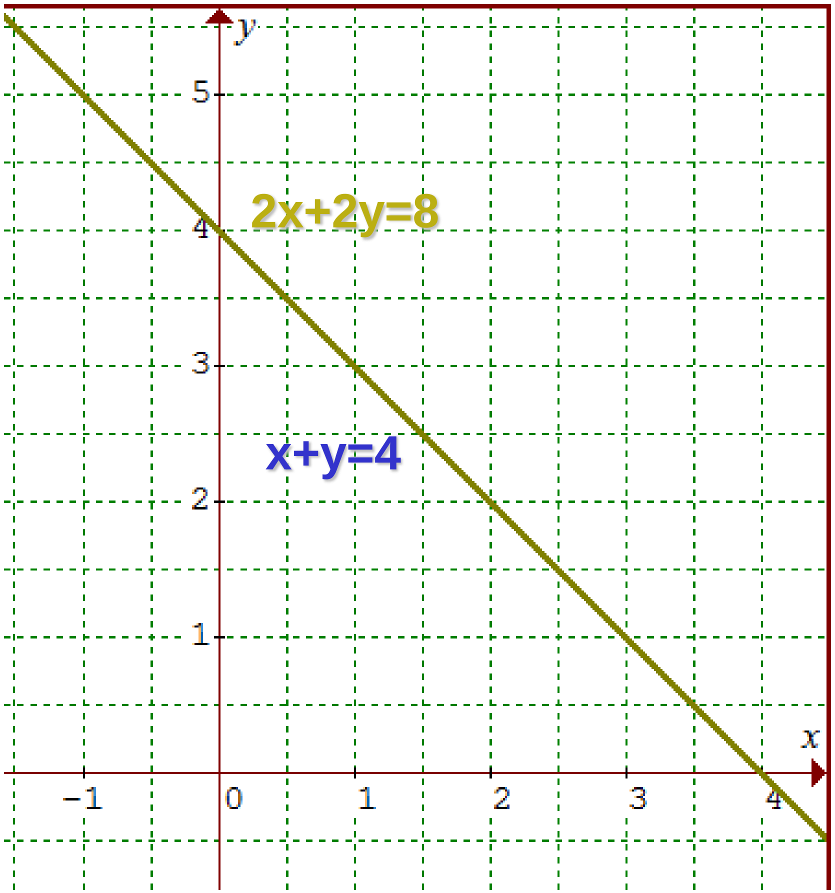


Sistema Impossível.

- Como são as retas associadas às equações?
- Não possuindo intersecção, as retas são: **PARALELAS.**

- Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$$



Infinitas soluções.
Duas maneiras diferentes de apresentar a mesma equação.

- Nessa situação dizemos que as retas são **COINCIDENTES.**

- No caso geral de ***m*** equações e ***n*** variáveis também temos estas três situações: solução única, infinitas soluções e nenhuma solução.

- Notação:

  - x^* solução exata
  - $\bar{x}$ solução aproximada

3. Tipos de Métodos

- Existem dois tipos de métodos para resolver sistemas de equações lineares:

  - **Métodos Diretos:** Utilizam um número finito de passos para obter a solução do sistema. Para minimizar erros de arredondamento adota-se o pivoteamento.
    - **Métodos Iterativos:** Podem ser mais rápidos, fornecendo sequências que convergem para a solução sob certas condições.

Métodos Diretos

- Eliminação de Gauss:
  - Pivotamento

- Gauss Jordan (Inversa)

- Decomposição LU:
  - A = LU (L é matriz triangular inferior e U matriz triangular superior); LUx=b; logo Ly=b (obtém y) em seguida Ux = y (obtém-se x)

- Choleski:
  - Se $A = A^T$ e A é positiva definida então $A = LL^T$, onde L é matriz triangular inferior.

Observações:

- Um sistema é considerado de pequeno porte se contém até 30 variáveis
- Um sistema é considerado de médio porte se contém até 50 variáveis
- Um sistema é de grande porte se contém mais de 50 variáveis.
- Para escolher um algoritmo eficiente para calcular a solução de um sistema deve-se levar em consideração a estrutura da matriz A, **seu tamanho, esparsidade e simetria**.

4. Eliminação de Gauss

- Neste método direto operações elementares da Álgebra Linear são aplicadas:
  - Troca de linhas
  - Multiplicação de uma linha por uma constante não nula;
  - Adição (subtração) de uma linha com um múltiplo de outra linha, para substituir uma das linhas envolvidas na operação.

O método consiste de dois passos básicos:

- Triangularização: transforma a matriz A numa matriz triangular superior, mediante operações elementares nas linhas, pois este tipo de sistema é de fácil resolução.

- Retrosubstituição: consiste no cálculo dos componentes do vetor solução, a partir da solução imediata do último componente e então substituímos regressivamente nas equações anteriores.

- Teorema 1: Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste uma sequência de operações elementares escolhidas entre:
  - trocar a ordem das equações,
  - multiplicar uma equação por constante,
  - adicionar um multiplo de uma equação a outra;
- Obtemos um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ equivalente.

- Suponha $Det\ A \neq 0$. A eliminação e efetuada por colunas.
- O elemento a_{11} é denominado pivô na primeira etapa. O elemento a_{22} é o pivô da segunda etapa. O processo repete-se até termos um sistema linear triangular.
- Os elementos $m_{i1} = a_{1i} / a_{11}$ são os multiplicadores da primeira etapa.
- Para gerar os zeros da coluna 1 linha i, faça $L_i \rightarrow L_i - m_{i1}\, L_1$ na linha i. Repita o processo para a coluna 2.

- Exemplo:
  - Seja o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$m_{21} = \frac{1}{3} \quad , \quad m_{31} = \frac{4}{3}$$

$$\Longrightarrow$$

$$L_2 \to L_2 - m_{21} L_1$$
$$L_3 \to L_3 - m_{31} L_1$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = (5/3) \\ (1/3)x_2 - (22/3)x_3 = (5/3) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = (5/3) \\ -(24/3)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Problema: Pivô nulo ou próximo de zero!!!!

- Estratégia de **pivoteamento parcial:**
  - No início de cada eliminação de Gauss, trocando as linhas, escolher para o pivô o maior $|a_{ij}|$ da coluna j.

- Estratégia de **pivoteamento total**
  - No início de cada eliminação de Gauss, escolher para o pivô o maior $|a_{ij}|$ entre todos elementos que atuam no processo de eliminação.

- Problema: Muitas operações de comparação!!

Pivoteamento Parcial X Pivoteamento total

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 - x_4 &= 5 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 0x_1 - \boxed{3x_2} - 5x_3 + 7x_4 &= 7 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 &= 15 \end{aligned}$$

parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 - x_4 &= 5 \\ 0x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 7 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 &= 15 \end{aligned}$$

continuar

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 - x_4 &= 5 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 0x_1 - 3x_2 - 5x_3 + \boxed{7x_4} &= 7 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 &= 15 \end{aligned}$$

total

$$\begin{aligned} 3x_1 + -x_4 + 1x_3 + 2x_2 &= 5 \\ 0x_1 + 7x_4 + 5x_3 - 3x_2 &= 7 \\ 0x_1 + 3x_4 + 0x_3 + 1x_2 &= 6 \\ 0x_1 + 0x_4 + 4x_3 + 2x_2 &= 15 \end{aligned}$$

continuar

5. Decomposição LU

- Dado um sistema de equações lineares, com A não-singular:

$$Ax = b$$

- A decomposição LU busca encontrar três matrizes nxn de maneira que

$$PA = LU \quad \Rightarrow \quad A = P^{-1}LU$$

Onde:

- P é uma matriz de permutação (de pivoteamento), inicia-se com a matriz I (identidade) que é colocada ao lado da matriz A, tal matriz sofrerá mudanças nas linhas se ocorrerem trocas entre linhas.
- L é uma matriz diagonal inferior (Lower)
- U é uma matriz triangular superior (Upper)

- Na decomposição $A=LU$ a matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e a matriz U é triangular superior.

- Passos para a solução:
  - Resolver $Ly=Pb$ por substituição direta.
  - Resolver $Ux=y$ por retrosubstituição.

Substituição Direta

$$L \cdot y = b$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_2 = \frac{1}{l_{22}}(b_2 - l_{21}y_1)$$

Retro substituição

$$U \cdot x = y$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{y_3}{u_{33}} \\ x_2 &= \frac{1}{u_{22}}(y_2 - u_{23}x_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Para o calculo de cada termo das matrizes *L* e *U:*

$$
\begin{cases}
\mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \leq j, \\
\ell_{\mathbf{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) / \, u_{jj}, & i > j.
\end{cases}
$$

- Exemplo da decomposição LU para uma matriz A_{3x3} sem pivotamento.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \qquad mij = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

- Exemplo de fatoração LU. Considere

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Do método de Gauss sem pivoteamento:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & \boxed{1} & -4 \end{pmatrix}$$

- Assim, as matrizes L e U são

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow LU = A$$

- Resolvendo o sistema $A\,x = b$ por fatoração LU:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow L\,y = b \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ 1/3y_1 + y_2 &= 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Continuando

$$U\,x = y \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 1/3\,x_2 + 2/3\,x_3 &= 5/3 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Fatoração de Cholesky(i)

- Se Anxn é uma matriz definida positiva ($x^T Ax > 0$) e simétrica, então tal matriz pode ser fatorada na forma $A = LU = LL^T$ cujos elementos diagonais de L são estritamente positivos.
- Fatoração de Cholesky: Primeiro verificar se uma matriz simétrica é definida positiva. Em caso positivo, continuar com o método de Cholesky.
- O método de Cholesky requer aproximadamente a metade das operações necessárias para a fatoração LU, da ordem de n3/6 operações.

- Como calcular os elementos de L

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\
l_{j1} &= \frac{a_{j1}}{l_{11}}, j = 2, 3, \dots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\
l_{j2} &= \frac{a_{j2} - l_{j1} l_{21}}{l_{22}}, j = 3, 4, \dots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - (l_{k1}^2 + l_{k2}^2 + l_{k3}^2 + \dots + l_{k,k-1}^2)} \\
l_{kj} &= \frac{\left[a_{jk-} \sum_{i=1}^{k-1} l_{ji} l_{ki}\right]}{l_{kk}}, j = k+1, k+2, \dots n
\end{aligned}
$$

Obtida a matriz L resolve-se o sistema:

Passo 1: Calcular Ly=b

Passo 2: Calcular L^Tx=y

- Obtenha a solução do sistema de equações lineares através de Cholesky.

$$x + y = 2$$
$$x + 2y - z = 1$$
$$-y + 3z = 5$$

- Fatoração de Cholesky: Primeiro verificar se uma matriz simétrica é definida positiva. Em caso positivo, continuar com o método de Cholesky.
- O método de Cholesky requer aproximadamente a metade das operações necessárias para a fatoração LU, da ordem de n3/6 operações.

7. Métodos Iterativos

- É bastante comum encontrar sistemas lineares que envolvem uma grande porcentagem de coeficientes nulos.
- Esses sistemas são chamados de sistemas esparsos.
- Para esses tipos de sistemas, o método de Eliminação de Gauss não é o mais apropriado, pois ele não preserva essa esparsidade, que pode ser útil por facilitar a resolução do sistema.

- Métodos Iterativos são indicados para resolver sistemas esparsos e de grande porte;
- Partem de uma solução inicial e sistematicamente geram uma sequência de iterandos;
- **Métodos diretos:** eliminação por Gauss, fatoração LU, fatoração de Cholesky, ... Fornecem solução de qualquer sistema. Para minimizar problemas de arredondamento, adota-se o pivoteamento.
- **Métodos iterativos:** podem ser mais rápidos e necessitar de menos memória do computador. Fornecem seqüências que convergem para a solução sob certas condições.

Computar uma seqüência de iterações que convergem para a solução desejada

Dada uma aproximação $\mathbf{x}^0$, o método iterativo gera uma seqüência

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$$

que converge para a solução desejada $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, onde $\mathbf{x}^{m+1}$ é calculado facilmente de $\mathbf{x}^m$

- não reproduzem a solução exata após um número finito de passos
- decrescem o erro em certa quantidade em cada passo (iteração)
- processo para quando o erro atinge uma tolerância pré-estabelecida
- erro final depende do número de iterações, das propriedades do método e das propriedades do sistema linear

- Seja *Ax=b* um sistema linear de ordem *n*. A ideia é generalizar o método do ponto fixo, escrevendo o sistema linear na forma

$$x=Cx+g$$

- onde *C* é uma matriz de ordem *n* e *g* é um vetor coluna *nx1*.
- Dado um vetor aproximação inicial $x^{(0)}$, construímos iterativamente:

$$\begin{cases} x^{(1)} = C\,x^{(0)} + g \\ x^{(2)} = C\,x^{(1)} + g \end{cases}$$

- Se a sequência $x^{(0)}$, $x^{(1)}$,....., $x^{(k)}$ convergir

$$\lim_{k \text{ grande}} x^{(k)} = C\,x^{(k-1)} + g = \alpha$$

- Então α é a solução do sistema linear

$$A\,x = b \quad \text{com} \quad x = \alpha$$

- Se a sequência $x^{(k)}$ estiver suficientemente próximo de $x^{(k+1)}$ paramos o processo, segundo uma precisão ε,

$$d^{(k)} = \underset{1 \le i \le n}{MAX} \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right| < \varepsilon$$

então $x^{(k)}$ é a solução do sistema linear.

- Computacionalmente, um número máximo de iterações também é critério de parada.

7.1. Método de Gauss-Jacobi

- Seja o sistema linear:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Se $a_{ii} \neq 0 \quad \text{para} \quad i = 1 \ldots n$ podemos isolar $x = C\,x + g$ por separação da diagonal.

- Iterativamente, o sistema reescreve-se como:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)$$

- Desta forma temos $x = C\,x + g$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \ldots\ldots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \ldots\ldots\ldots & -a_{2n}/a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

Do método de Gauss-Jacobi, dado $x^{(0)}$,
Obtemos $x^{(1)}$, ...,$x^{(k+1)}$ através da relação recursiva

$$x^{(k+1)} = C\,x^{(k)} + g$$

- Exemplo: Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} 10\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 7 \\ 1\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 &= -8 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 10\,x_3 &= 6 \end{aligned}$$

- Seja $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ com $\varepsilon = 0.05$ .Portanto,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

- Substituindo

$$x_1^{(1)} = -0.2\, x_2^{(0)} - 0.1\, x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2\,(-1.6) - 0.1\,(0.6) + 0.7 = 0.96$$
$$x_2^{(1)} = -0.2\, x_1^{(0)} - 0.2\, x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2\,(0.7) - 0.2\,(0.6) - 1.6 = -1.86$$
$$x_3^{(1)} = -0.2\, x_1^{(0)} - 0.3\, x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2\,(0.7) - 0.3\,(-1.6) + 0.6 = 0.94$$

- Segue $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}$. Calculando

$$d_1^{(1)} = \left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right| = 0.26 > 0.05$$
$$d_2^{(1)} = \left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right| = 0.26 > 0.05$$
$$d_3^{(1)} = \left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| = 0.34 > 0.05$$

- Continuando $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix}$ com

$$d^{(2)} = \underset{1 \le i \le n}{MAX} \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right| = 0.12 > \varepsilon$$

- Segue $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.999 \\ 0.998 \end{pmatrix}$ é a solução, pois

$$d^{(3)} = \underset{1 \le i \le n}{MAX} \left| x_i^{(3)} - x_i^{(2)} \right| = 0.032 < \varepsilon$$

Critérios de Convergência

- Nos métodos iterativos são necessários critérios que garantam a convergência.
- Um critério para a convergência do Método de Gauss-Jacobi é dado pelo **Critério das linhas**.
- Dado o sistema *Ax=b* , seja $\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\right) / |a_{kk}|$
- Se $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma série convergente para a solução do sistema independentemente da escolha de $\mathbf{x}^{(0)}$.

- Exemplo: Considere o sistema já estudado:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 1x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

- Critério das linhas:

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = 0.3 < 1 \qquad \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1 \qquad \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5 < 1$$

- Logo, $\alpha = \max_{1 \le k \le n} \alpha_k = 0.5 < 1$ $\Rightarrow$ convergência OK!

- Obs1: O sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$ converge pelo método de Gauss-Jacobi. No entanto, $\alpha = \max_{1 \le k \le n} \alpha_k = 1$. Isto mostra que o Teorema das linhas é apenas suficiente para convergência.

- Obs2: O sistema $\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \max_{1 \le k \le n} \alpha_k = 4$

- Contudo, o sistema equivalente converge pelo critério das linhas! $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 1x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 0x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \max_{1 \le k \le n} \alpha_k = 0.8 < 1$

7.2. Método de Gauss-Seidel

- Seja o sistema linear:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Se $a_{ii} \neq 0 \quad \text{para} \quad i = 1 \ldots n$ podemos isolar $x = C\,x + g$ por separação da diagonal.

- Iterativamente, o sistema reescreve-se como:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)$$

- O Método de Gauss-Seidel é uma variação do Método de Gauss-Jacobi, pois para calcular $x_j^{(k+1)}$ utilizamos os valores

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \ldots.., x_{j-1}^{(k+1)}$$

já calculados e os valores restantes

$$x_{j+1}^{(k+1)}, x_{j+2}^{(k+1)}, \ldots.., x_n^{(k+1)}$$

Exemplo:

- Seja o sistema linear $\begin{cases} 5\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 = 5 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 + 1\,x_3 = 6 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 6\,x_3 = 0 \end{cases}$

- Seja $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ com $\varepsilon = 0.05$. Portanto,

$$x_1^{(k+1)} = \left(1 - 0.2\,x_2^{(k)} - 0.2\,x_3^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \left(1.5 - 0.75\,x_1^{(k+1)} - 0.25\,x_3^{(k)}\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \left(0 - 0.5\,x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}\right)$$

Logo, a primeira iteração fornece

$$x_1^{(1)} = \left(1 - 0.2\, x_2^{(0)} - 0.2\, x_3^{(0)}\right) = 1 - 0 - 0 = 1$$

$$x_2^{(1)} = \left(1.5 - 0.75\, x_1^{(1)} - 0.25\, x_3^{(0)}\right) = 1.5 - 0.75 \times 1 - 0.25 \times 0 = 0.75$$

$$x_3^{(1)} = \left(0 - 0.5\, x_1^{(1)} - 0.5 x_2^{(1)}\right) = -0.5 \times 1 - 0.5 \times 0.75 = -0.88$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.88 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0.75 - 0| = 0.75 > \varepsilon$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |-0.88 - 0| = 0.88 > \varepsilon$$

A segunda iteração fornece:

$$x_1^{(2)} = \left(1 - 0.2\,x_2^{(1)} - 0.2\,x_3^{(1)}\right) = 1.03$$
$$x_2^{(2)} = \left(1.5 - 0.75\,x_1^{(2)} - 0.25\,x_3^{(1)}\right) = 0.95$$
$$x_3^{(2)} = \left(0 - 0.5\,x_1^{(2)} - 0.5x_2^{(2)}\right) = -0.99$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.03 \\ 0.95 \\ -0.99 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = 0.03 < \varepsilon$$
$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = 0.2 > \varepsilon$$
$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = 0.11 > \varepsilon$$

A terceira iteração fornece:

$$x_1^{(3)} = \left(1 - 0.2\,x_2^{(2)} - 0.2\,x_3^{(2)}\right) = 1.01$$

$$x_2^{(3)} = \left(1.5 - 0.75\,x_1^{(3)} - 0.25\,x_3^{(2)}\right) = 0.99$$

$$x_3^{(3)} = \left(0 - 0.5\,x_1^{(3)} - 0.5x_2^{(3)}\right) = -1.00$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \\ -1.00 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0.02 < \varepsilon \\ \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0.04 < \varepsilon \\ \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = 0.01 < \varepsilon \end{array}$$

- Logo, após a terceira iteração

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \\ -1.00 \end{pmatrix}$$

é solução do sistema considerado com erro menor do que $\varepsilon = 0.05$.

8. Critérios de Convergência

- Nos métodos iterativos são necessários critérios que garantam a convergência.
- Convergência para o Método de Gauss-Seidel:
  1) Critério das linhas (já visto)
  2) Critério de Sassenfeld
- Os critérios acima estabelecem condições suficientes para a convergência.

Método de Gauss-Seidel
Convergência - Critério de Sassenfeld

- Sejam $\beta_1 = \dfrac{|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} = \sum_{j=2}^{n} \dfrac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}$

e

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}|\beta_1 + |a_{i2}|\beta_2 + \ldots + |a_{ii-1}|\beta_{i-1} + |a_{ii+1}| + \ldots |a_{in}|}{|a_{ii}|}$$

$$= [\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|] / |a_{ii}| \quad i = 2,3,\ldots n$$

Critério de Sassenfeld

- Seja

$$\beta = \max_{1 \le i \le n} \{\beta_i\}$$

- Se β < 1, o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente para qualquer $\mathbf{x}^{(0)}$.
- Quanto menor β, mais rápida a convergência.

- Seja o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.1x_3 + 0.1x_4 = 0.2 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_3 - 0.1x_4 = -2.6 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3 + 0.2x_4 = 1.0 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + x_4 = -2.5 \end{cases}$$

$$\beta_1 = [\sum_{j=2}^{4} |a_{1j}|] / |a_{11}| = [|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|] / |a_{11}| = [0.5 + 0.1 + 0.1]/1 = 0.7$$

$$\beta_2 = [\sum_{j=1}^{2-1} |a_{2j}|\beta_j + \sum_{j=2+1}^{4} |a_{2j}|] / |a_{22}| = [|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}|] / |a_{22}| =$$

$$= [0.2 \cdot 0.7 + 0.2 + 0.1]/1 = 0.44$$

$$\beta_3 = [\sum_{j=1}^{3-1} |a_{3j}|\beta_j + \sum_{j=3+1}^{4} |a_{3j}|] / |a_{33}| = [|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2 + |a_{34}|] / |a_{33}| =$$

$$= [0.1 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.44 + 0.2]/1 = 0.358$$

$$\beta_4 = [\sum_{j=1}^{4-1} |a_{4j}|\beta_j + \sum_{j=4+1}^{4} |a_{4j}|] / |a_{44}| = [|a_{41}|\beta_1 + |a_{42}|\beta_2 + |a_{43}|\beta_3] / |a_{44}| =$$

$$= [0.1 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.44 + 0.2 \cdot 0.358]/1 = 0.274$$

- Então,

$$\beta = \max_{1 \le i \le n} \{\beta_i\} = 0.7 < 1$$

de modo que o método de Gauss-Seidel converge.

- Seja o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ \quad\; - x_2 + \;\; x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

- Neste caso, $\beta_1 = [1+3]/2 = 2 > 1$
- Trocando a 1ª equação pela terceira,

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 3 \\ \quad\; - x_2 + \;\; x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

- Nesta disposição: $\beta_1 = [0+3]/1 = 3 > 1$

- Agora se trocarmos a 1ª coluna pela terceira,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ \quad - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \quad + 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_3 \quad + x_1 = 3 \\ x_3 - x_2 + \quad = 1 \\ 3x_3 + x_2 + 2x_1 = 9 \end{cases}$$

- Nesta disposição:

$$\beta_1 = [1+1]/3 = 1/3$$

$$\beta_2 = [1 \cdot (1/3) + 0]/1 = 1/3$$

$$\beta_3 = [3 \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) // 2 = 2/3$$

$$\beta = \max_{1 \le i \le n} \{\beta_i\} = 2/3 < 1$$

Garantia de convergência

- Seja o sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$
- O método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, apesar do critério das linhas não ser satisfeito.
- Pelo critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = 1/1 = 1$$
$$\beta_2 = 1 \cdot 1/3 = 1/3$$

$\Rightarrow$ O critério de Sassenfeld não é satisfeito.

$\Downarrow$

O critério de Sassenfeld também é suficiente, mas não necessário.

9. Metodos Iterativos - Comparação

- Seja o sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$

- Método de Gauss-Jacobi:

$$x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(3 - x_1^{(k)}\right)$$

- Temos a sequência:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

- Seja o sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$

- Método de Gauss-Seidel:

$$x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(3 - x_1^{(k+1)}\right)$$

- Temos a sequência:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 14/9 \end{pmatrix}$$

- **Comentário1**: As duas sequências convergem para a solução exata do sistema $x* = (1.5 \quad 1.5)$. Vejamos,

  a) Gauss-Jacobi : $x_{GJ}{}^{(4)} = (1.33 \quad 1.33)$

  b) Gauss-Seidel: $x_{GS}{}^{(3)} = (1.67 \quad 1.56)$

- **Comentário 2**: A convergência do Método de Gauss-Seidel é mais rápida, por construção do método.

- **Comentário 3**: Embora a ordem das equações num sistema linear não mude a solução exata, as sequências geradas pelos Métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel dependem fundamentalmente da disposição das equações.

10. Metodos Diretos e Iterativos - Comparação

1) Convergência:

- Os Métodos Diretos são processos finitos portanto fornecem solução para qualquer sistema linear não-singular.

- Os Métodos Iterativos têm convergência assegurada sob certas condições.

2) Esparsidade da Matriz:

Em problemas reais, como a discretização de EDO's pelo Método de Elementos Finitos ou Diferenças Finitas, as matrizes dos coeficientes tornam-se esparsas. A forma de armazenamento destes dados tira proveito da esparsidade.

- Métodos diretos em sistemas esparsos provocam o preenchimento da matriz e no processo de Eliminação (escalonamento) geram elementos não-nulos, onde originalmente tínhamos elementos nulos. Técnicas especiais de pivoteamento reduzem este preenchimento. Fatoramento LU dão bons resultados. Algumas situações estes métodos não são possíveis.
- Métodos iterativos não alteram a estrutura da matriz dos coeficientes. Vantagem.

3) Erros de Arredondamento

- Métodos Diretos têm problemas de arredondamento. Técnicas de Pivoteamento amenizam tais erros.

- Métodos iterativos têm menos erros de arredondamento, quando a convergência estiver assegurada.