ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 1

Geometria das equações lineares

Geometria das Equações Lineares

- Problema Central da Álgebra Linear:

n Equações Lineares com n incógnitas

❖Forma matricial

❖Interpretação geométrica por linhas

❖Interpretação geométrica por colunas

- Exemplo

- $x + 2y = 4$
- $x + 3y = 5$

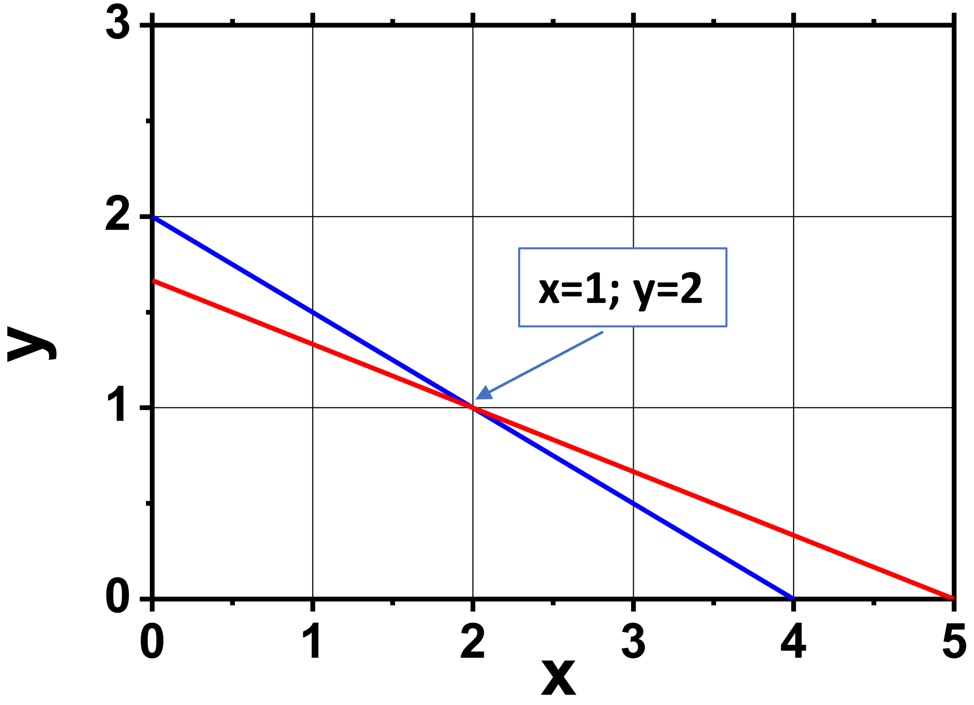
A forma matricial relacionada a este sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \mathbf{x} = b$$

Geometria das Equações Lineares

❖ Interpretação geométrica por linhas



- Exemplo

- $x + 2y = 4$
- $x + 3y = 5$

A forma matricial relacionada a este sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \mathbf{x} = b$$

Geometria das Equações Lineares

- Interpretação geométrica por colunas

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Combinação Linear das colunas !!!

- Exemplo

- $x + 2y = 4$
- $x + 3y = 5$

A forma matricial relacionada a este sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \mathbf{x} = b$$

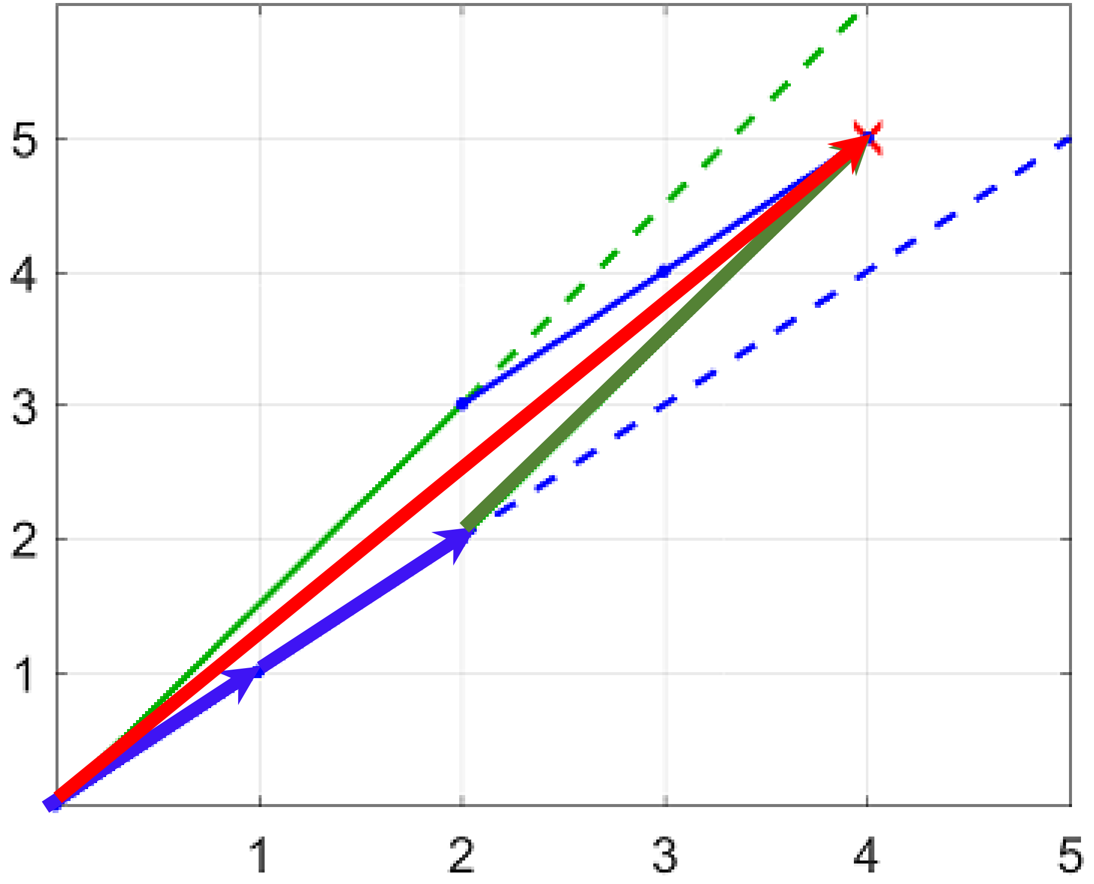
Geometria das Equações Lineares

❖Interpretação geométrica por colunas

$$x \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

Combinação Linear (CL) das colunas !!!

$$2 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$



Geometria das Equações Lineares

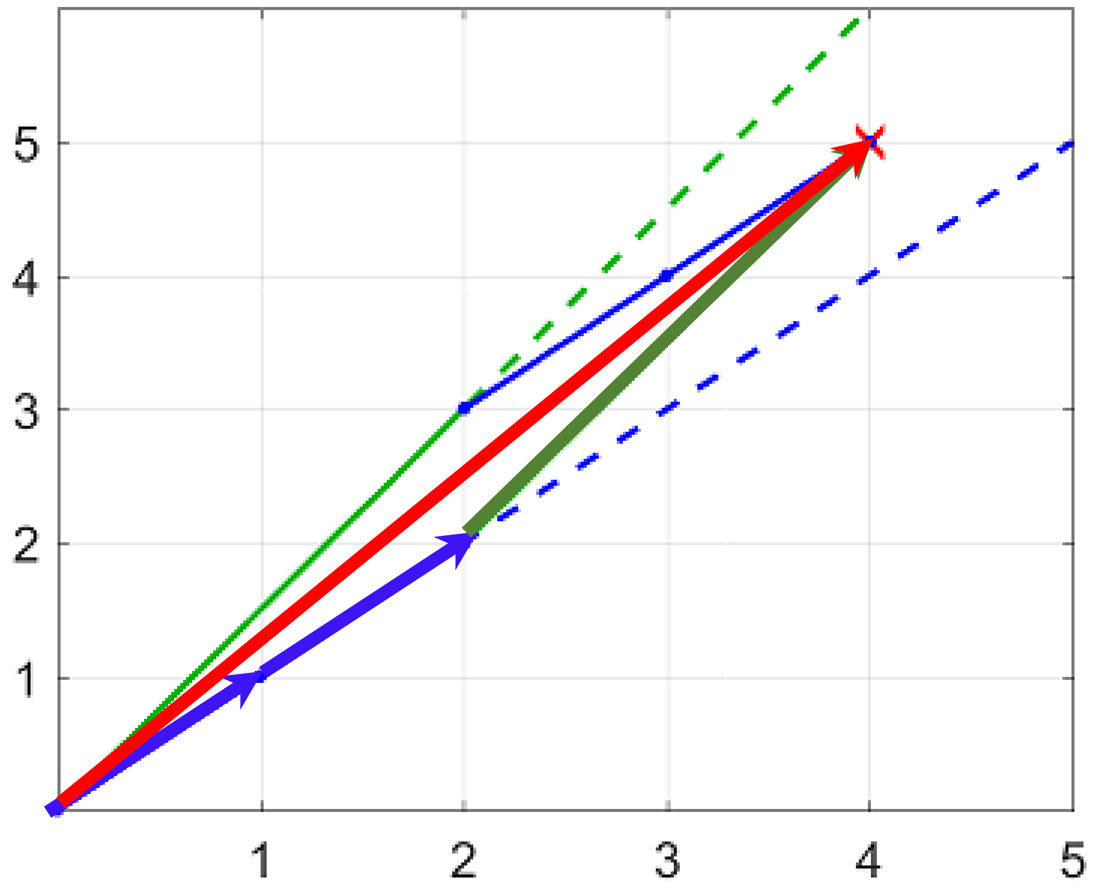
❖ Interpretação geométrica por colunas

$$x \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

quais são todas as possíveis combinações desses vetores?

$$x \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}$$

quais são todos os possíveis resultados para todos os possíveis x e y ?



Geometria das Equações Lineares

E no caso de 3 equações e 3 incógnitas?

$$\begin{aligned} 2x - y \quad &= 0 \\ -x + 2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

Como visualizamos estas equações?

A forma matricial é....

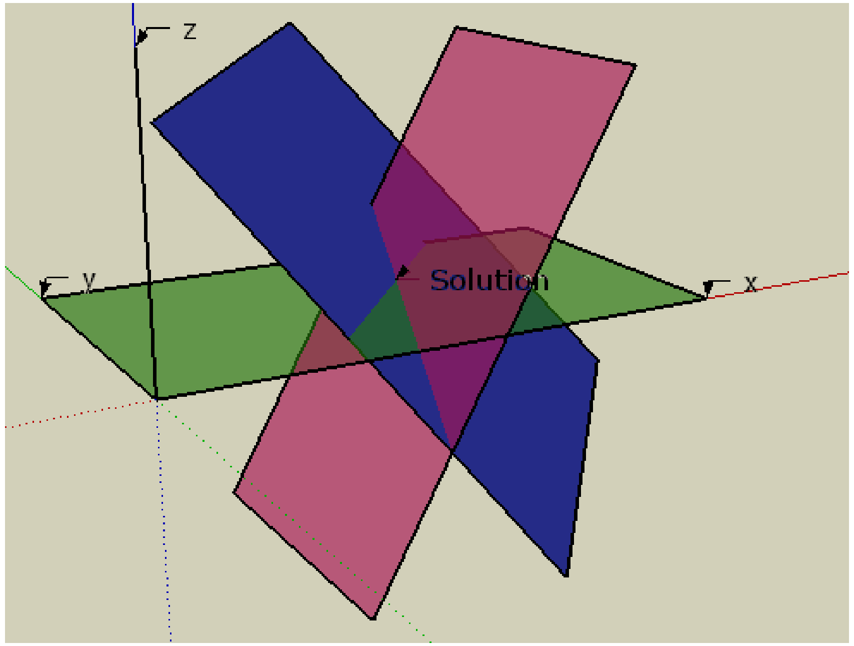
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad \mathbf{x} = b$$

A interpretação por **LINHAS**

Desenhemos todos os pontos (x,y,z) que satisfazem cada uma dessas equações....

Agora temos planos!



E se for um sistema 4x4 ou 5x5?......

Geometria das Equações Lineares

E no caso de 3 equações e 3 incógnitas?

$$\begin{aligned} 2x - y \quad\quad &= 0 \\ -x + 2y - z \quad &= -1 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

Como visualizamos estas equações?

A forma matricial é....

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \mathbf{x} = b$$

A interpretação por **COLUNAS**

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Precisamos de uma CL que dê o vetor da direita!

Vamos desenhar eles....

A combinação certa é x=0; y=0; z=1

Vamos mudar o lado direito da seguinte forma....

Geometria das Equações Lineares

E no caso de 3 equações e 3 incógnitas?

$$\begin{aligned} 2x - y \quad\quad &= 0 \\ -x + 2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

Como visualizamos estas equações?

A forma matricial é....

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A $\quad$ $\mathbf{x}$ $\quad = \quad$ b

A interpretação por **COLUNAS**

$$\text{x}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{y}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \text{z}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A nova solução é..... x=1; y=1; z=0

No caso das linhas seriam 3 novos planos se cruzando neste novo ponto....

No caso das colunas são os mesmos vetores combinados de outra forma...

Qual seria o quadro para todos os possíveis “b”?

Podemos resolver esta equação para qualquer lado direito b?

Geometria das Equações Lineares

Em outras palavras, as CL das colunas podem preencher todo o espaço 3D?

$$A\ \mathbf{x} = b$$

Para esta matriz (para estas colunas) a resposta é sim!

Esta matriz é uma boa matriz, não é singular, pode ser invertida...

Podem existir outras matrizes onde a resposta é não?

Analisemos o problema...quando os vetores não alcançam todos os pontos do espaço 3D?

Quando estão no mesmo plano!

A interpretação por **COLUNAS**

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A nova solução é..... $x=1$; $y=1$; $z=0$

No caso da interpretação por linhas seriam 3 novos planos se cruzando neste novo ponto....

Na interpretação por colunas são os mesmos vetores combinados de outra forma...

Qual seria o quadro para todos os possíveis “b”?

Podemos resolver esta equação para qualquer lado direito b?

Geometria das Equações Lineares

Imagine que temos 2 colunas iguais...

Nesse caso só pontos desse plano podem ser alcançados

Essa Matriz será singular, e não terá como ser invertida...

Imaginem o caso de vetores em 10 dimensões...ou seja um sistema 10x10.

Imaginem que queremos saber se ele pode ser resolvido para qualquer ponto do espaço 10D....

Vai depender das 10 colunas....

Se alguma não é independente a resposta será não! Por quê?

Geometria das Equações Lineares

Uma questão que temos que esclarecer **é como se multiplicam matrizes por vetores**...

$$A\,\mathbf{x} = b$$

Há duas formas....

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A·x é uma combinação das colunas da matriz A !!!

Vamos analisar agora um caso onde as coisas dão erradas....e tentar entender por que dão erradas...

Geometria das Equações Lineares

Vamos analisar o caso de três planos descritos pelas equações a seguir

$$
\begin{aligned}
2u + v + w &= 5 \\
4u - 6v \qquad &= -2 \\
-2u + 7v + 2w &= 4
\end{aligned}
$$

A questão dos planos paralelos...

$2u + v + w = 10$ é $paralelo\ a$ $2u + v + w = 5$

Que característica tem o plano $2u + v + w = 0$?

$4u - 6v = -2$ é paralelo ao eixo w

Conseguem visualizar os planos $4u = 0$ ou $4u = 2$?

A interseção desses dois planos (não paralelos) é uma reta

Finalmente o terceiro plano (não paralelo) interceptaria essa reta num ponto

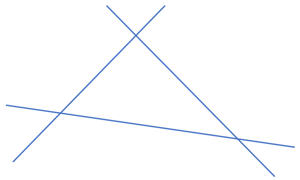
O que poderia dar errado? Vamos ver um exemplo...

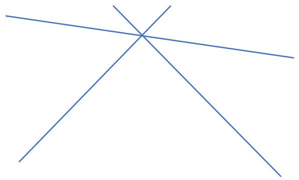
Geometria das Equações Lineares

Na interpretação por linhas ...e se os planos são paralelos?

Diferentemente de 2 linhas em duas dimensões, 3 planos em 3 dimensões podem não se cortar mesmo não sendo paralelos (as interseções são retas paralelas) como no caso a seguir:

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ 2u + 3w &= 5 \\ 3u + v + 4w &= 6 \end{aligned}$$


(a)


(b)

(1)+(2)-(3) daria que 0 = 1 [caso (a)] o que significa?

E se tivéssemos $3u + v + 4w = 7$

Teríamos infinitas soluções pois daria que 0 = 0...qual seria a figura?

Os três planos possuem uma reta inteira em comum!!! [caso (b)]

E na interpretação por colunas?

Geometria das Equações Lineares

Na interpretação por colunas ...também tem que ter algo errado, mas o que?

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ 2u + 3w &= 5 \\ 3u + v + 4w &= 6 \end{aligned} \qquad u\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = b$$

para b = $\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}$ é possível   para b = $\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$ não é possível

O motivo da impossibilidade é que **<u>as 3 colunas estão num mesmo plano</u>**! Só tem solução se o vetor b também está nesse plano (infinitas soluções para o primeiro b ... 3 vetores num mesmo plano dão infinitas combinações para qualquer b no mesmo plano e não tem solução para o b fora do plano)

Como saberemos quando as colunas (os vetores) estão no mesmo plano?

Geometria das Equações Lineares

Uma forma é encontrar uma CL de colunas que de zero! Assim serão dependentes!!

$$u\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = b$$

u=3; v=-1; w=-2 da zero!! Ou seja 3x a coluna 1 é igual à coluna 2 mais 2x a coluna 3

O vetor b = $\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}$ é combinação de (1) + (3) portanto está no mesmo plano (1;0;1 é sol.)

Fato importante:

Se os n planos não possuem nenhum ponto em comum ou possuem infinitos pontos em comum, então os n vetores-coluna se localizam num mesmo plano.

Geometria das Equações Lineares

Livro Álgebra Linear e suas aplicações

Gilbert Strang

4 edição

Página 9

Conjunto de problemas 1.2

Resolver: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 11; 14; 15; 17; 18; 20; 22