EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 02_1

EQUAÇÕES LINEARES
FATORES INTEGRANTES

Fatores Integrantes

Lembrando ...

Uma ODE linear de primeira ordem tem a forma geral

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

em que a função f é linear em y

Exemplos incluem equações com coeficientes constantes, com as apresentadas anteriormente...

$$y' = ay - b$$

ou equações com coeficientes variáveis

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Fatores Integrantes

Coeficientes constantes

No caso das ODE com coeficientes constantes

$$y' = ay - b$$

já vimos que podem ser resolvidas utilizando métodos de cálculo...

$$\frac{dy}{dt} = a\,(y - \frac{b}{a}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{y - \frac{b}{a}} = a \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y - \frac{b}{a}} = \int a\,dt$$

$$\Rightarrow \quad ln\left|y - \frac{b}{a}\right| = at + C \quad \Rightarrow \quad \left|y - \frac{b}{a}\right| = e^{at+C} \quad \Rightarrow \quad y - \frac{b}{a} = \pm e^{at}e^{C}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a} + ke^{at} \qquad k = \pm e^{C}$$

A solução geral é: $\boldsymbol{y(t) = \frac{b}{a} + ke^{at}}$

Fatores Integrantes

Coeficientes variáveis

No caso das ODE com coeficientes variáveis $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$

O método para resolver ela envolve **multiplicar a equação por uma função μ(t)** escolhida de forma que a equação resultante seja facilmente integrável, vejamos um exemplo para o caso onde somente g(t) é variável...

Considere a equação $y' + \ 2y = e^{\frac{t}{2}}$

Multiplicando por μ(t) $\mu(t)y' + 2\mu(t)y = e^{\frac{t}{2}}\mu(t)$

Escolhemos μ(t) de forma que a parte esquerda da equação seja uma derivada conhecida. Lembrando a regra do produto....

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\ y' + \mu'(t)\ y$$

escolhemos μ(t) de forma que: $\mu'(t) = 2\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{2t}$

Fatores Integrantes

Coeficientes variáveis

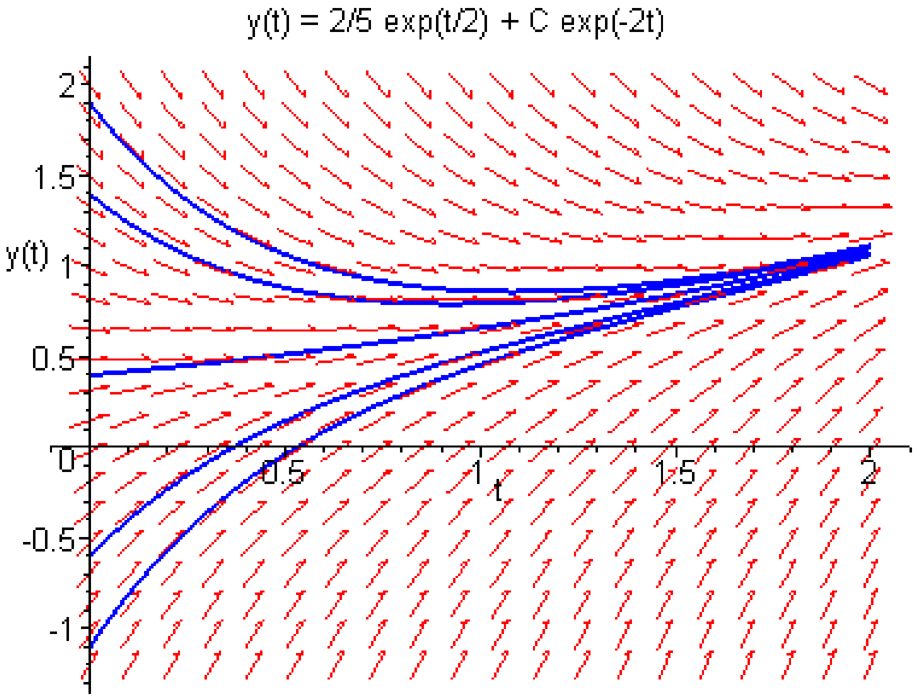
Com $\mu(t) = e^{2t}$ resolvemos a equação original da seguinte forma:

$$y' + 2y = e^{\frac{t}{2}} \qquad \mu(t)y' + 2\mu(t)y = e^{\frac{t}{2}}\mu(t) \qquad e^{2t}y' + 2e^{2t}y = e^{\frac{5t}{2}}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{2t}y] = e^{\frac{5t}{2}}$$

$$e^{2t}y = \frac{2}{5}e^{\frac{5t}{2}} + C$$

$$y = \frac{2}{5}e^{\frac{t}{2}} + Ce^{-2t}$$



Fatores Integrantes

Coeficientes variáveis

Para um **lado direito g(t)** qualquer, o método geral é:

$$y' + \ ay = g(t)$$

$$\mu(t)y' + a\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

$$e^{at}y' + ae^{at}y = e^{at}g(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{at}y] = e^{at}g(t)$$

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)dt$$

$$y = e^{-at}\int e^{at}g(t)dt + Ce^{-at}$$

Vejamos um exemplo...

Fatores Integrantes

Coeficientes variáveis

Resolva a equação diferencial $\quad y' - 2y = 4 - t$

Nesta equação teríamos que a=-2 portanto o fator integrante seria $\mu(t)=e^{-2t}$ logo...

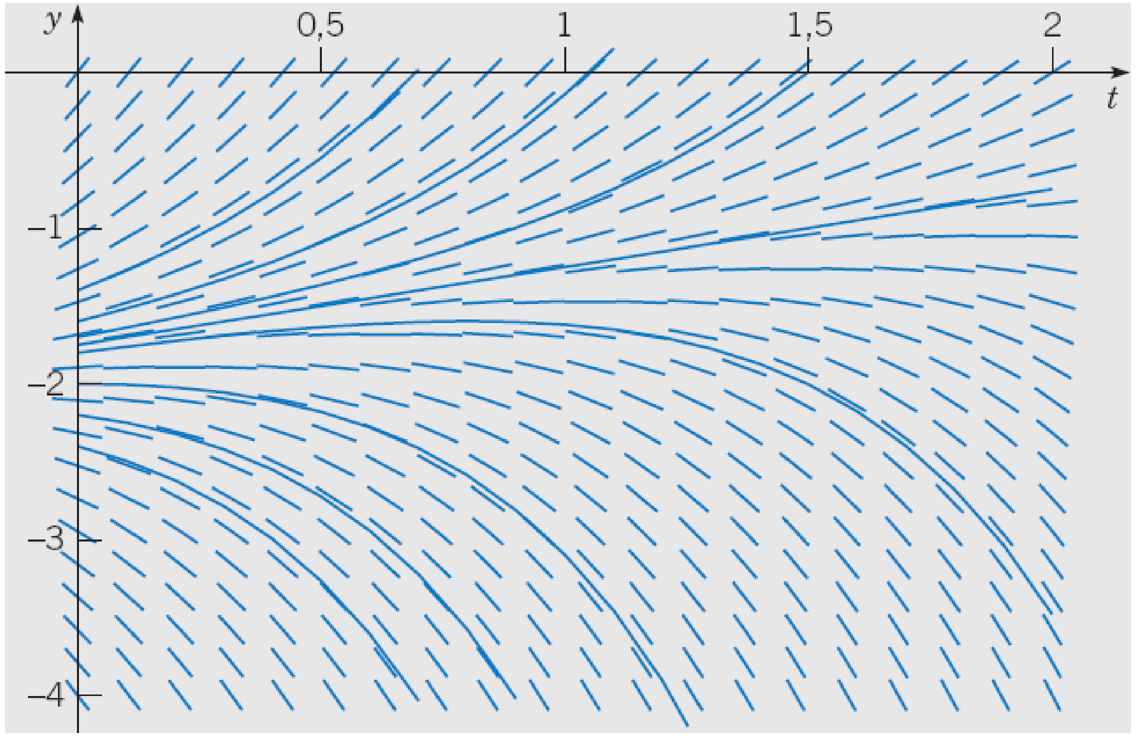
$$e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y = 4e^{-2t} - te^{-2t}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-2t}y] = 4e^{-2t} - te^{-2t}$$

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + C$$

Logo a solução geral é:

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + Ce^{2t}$$



Fatores Integrantes

Método geral

Vamos voltar à equação diferencial linear de primeira ordem $y' + p(t)y = g(t)$

Diferentemente do caso anterior, agora o termo *p(t)* perante *y* também é variável

Seguimos o mesmo procedimento já explicado....multiplicamos por □(t)

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t)$$

exigimos....

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)p(t)$$

Vamos supor temporariamente que □(t) é positiva

$$\frac{\frac{d\mu(t)}{dt}}{\mu(t)} = p(t)$$

$$\ln(\mu(t)) = \int p(t)\,dt + k$$

Escolhendo a constante arbitraria k como zero obtemos a função mais simples possível para μ(t), a saber,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

substituindo em....

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)p(t)$$

obtemos...

Fatores Integrantes

Método geral

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$ de onde.... $$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)\,dt + C$$

A solução final será $$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)g(t)\,dt + C\right]$$

Exemplo. Resolva o problema de valor inicial a seguir

$$ty' + 2y = 4t^2$$
$$y(1) = 2$$

$$\boldsymbol{y' + \frac{2}{t}y = 4t}$$

O fator integrante será: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2ln|t|} = t^2$

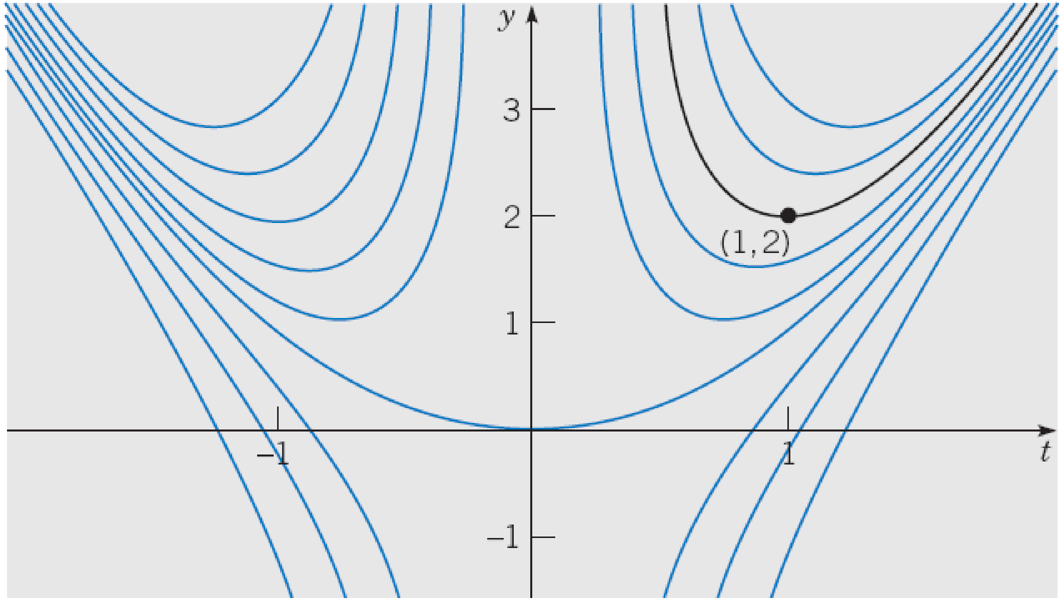
Multiplicando por t²... $t^2y' + 2ty = 4t^3$ $\quad (t^2y)' = 4t^3$ $\quad t^2y = t^4 + C$

logo... $y(t) = t^2 + \frac{C}{t^2}$ Para y(1) = 2 teremos C=1 $\boxed{\boldsymbol{y = t^2 + \frac{1}{t^2}}}$

Fatores Integrantes

Análise...

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}$$



é a solução do problema de valor inicial.

Essa solução corresponde à curva que contém o ponto (1, 2) na figura.

Note que ela torna-se ilimitada e se aproxima assintoticamente do semieixo positivo dos y quando t → 0 pela direita.

Esse é o efeito da descontinuidade infinita do coeficiente p(t)=2/t na origem.

A função $y = t^2 + (1/t^2)$ para $t < 0$ não é parte da solução deste problema de valor inicial.

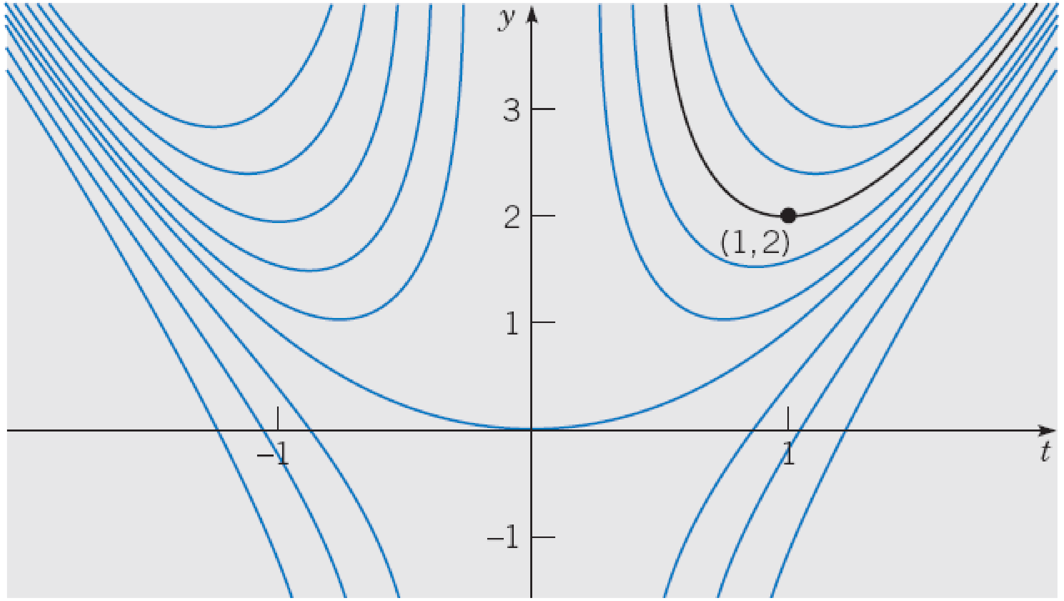
Esse é o primeiro exemplo no qual a solução não existe para alguns valores de t. Novamente, isso é devido à descontinuidade infinita de p(t) em t = 0, que restringe a solução ao intervalo $0 < t < \infty$.

Fatores Integrantes

Análise...

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}$$

Olhando para a figura, vemos que algumas soluções (aquelas para as quais c > 0) são assintóticas ao semieixo positivo dos y quando t → 0 pela direita, enquanto outras soluções (para as quais c < 0) são assintóticas ao semieixo negativo dos y.



A solução para a qual c = 0, a saber, $y = t^2$, permanece limitada e diferenciável até em t = 0.

Se generalizarmos a condição inicial para $y(1) = y_0$ implica que $C = y_0 - 1$ portanto:

$$y = t^2 + \frac{y_0 - 1}{t^2}$$

$$t > 0 \; se \; y_0 \neq 1$$

existe um valor inicial crítico, a saber, $y_0 = 1$, que separa soluções que se comportam de duas maneiras bem diferentes.

Fatores Integrantes

Resolver e analisar as soluções $2y' + ty = 2 \qquad y(0) = 1$

Colocar a equação na forma padrão (para identificar quem é p(t) e g(t)).

$y' + \frac{t}{2}y = 1$ o fator integrante será: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{t}{2}dt} = e^{\frac{t^2}{4}}$

Multiplicando.... $e^{\frac{t^2}{4}}y' + \frac{t}{2}e^{\frac{t^2}{4}}y = e^{\frac{t^2}{4}}$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade é a derivada de $e^{\frac{t^2}{4}}$ y; portanto, integrando obtemos

$$e^{\frac{t^2}{4}}y = \int e^{\frac{t^2}{4}}dt + C$$

Finalmente $y = \frac{1}{e^{\frac{t^2}{4}}}\int e^{\frac{t^2}{4}}dt + \frac{C}{e^{\frac{t^2}{4}}}$

A integral não pode ser calculada em termos das funções elementares de modo que deixamos a solução na forma integral.

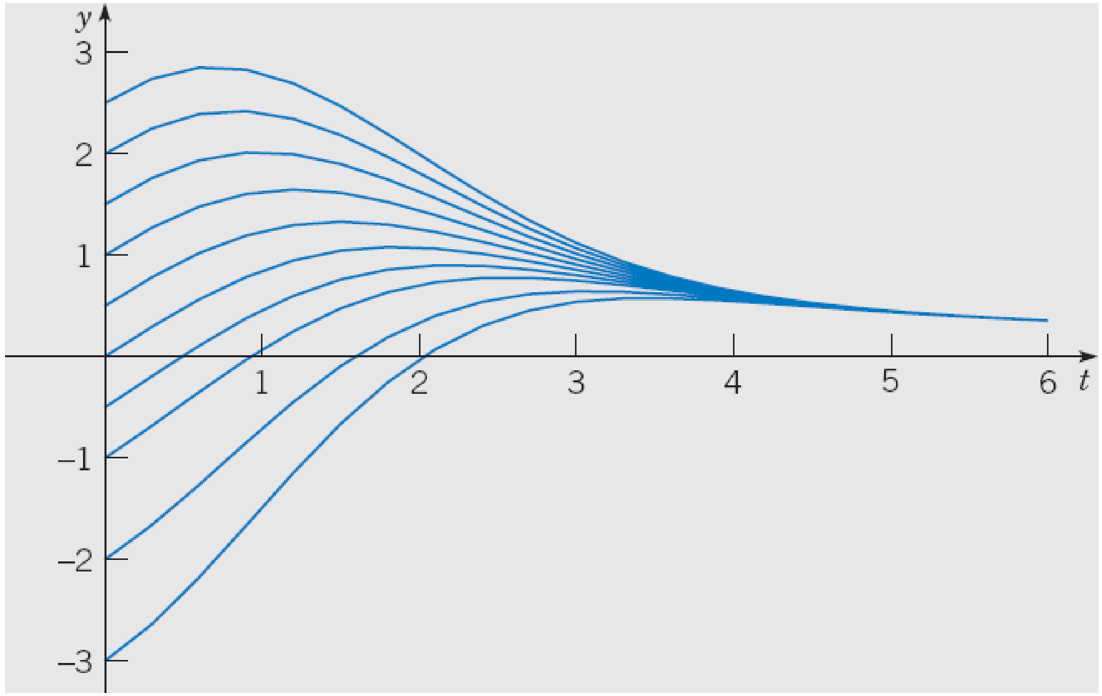
Fatores Integrantes

Resolver e analisar as soluções $\quad 2y' + ty = 2 \qquad y(0) = 1$

Resolvendo a integral $\quad y = \dfrac{1}{e^{\frac{t^2}{4}}}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{t^2}{4}}dt + \dfrac{C}{e^{\frac{t^2}{4}}}$

para diferentes valores de t e colocando os resultados em um gráfico, você pode obter um gráfico da solução.

Para isso pode utilizar um método numérico de aproximação (Softwares como o Maple, e o Mathematica executam esses cálculos rapidamente)



Fatores Integrantes

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço