EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 04_4

EQUAÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS.

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

INTRODUÇÃO

O método da variação de parâmetros serve para determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear não homogênea de ordem n e é mais geral do que o método de coeficientes indeterminados, pois funciona para qualquer função contínua g(t)

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = g(t)$$

Suponha que conhecemos um conjunto fundamental de soluções $y_1, y_2, \dots, y_n$ da equação homogênea. Assumimos que a solução particular tem a forma:

$$Y(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t) + \cdots + u_n(t) y_n(t)$$

em que $u_1,\dots,u_m$ são n funções a serem determinadas

Para encontrar estas n funções precisamos de n equações...

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Como precisamos determinar n funções, teremos que especificar n condições. É claro que uma dessas é que Y satisfaça a equação diferencial.

As outras n – 1 condições são escolhidas de modo a tornar os cálculos o mais simples possível.

Vamos a seguir impor condições que suprimam os termos contendo as derivadas de ordem mais alta de $u_1, \dots, u_n$...derivando a expressão anterior obtemos...

$$Y' = (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n) + (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n')$$

A primeira condição que impomos é: $u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0$

Segue que Y′ se reduz a: $Y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n'$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Continuamos esse processo calculando as derivadas sucessivas Y'', . . . , $Y^{(n-1)}$. Depois de cada diferenciação, igualamos a zero a soma dos termos envolvendo as derivadas de u_1, . . . , u_n. Dessa forma, obtemos mais $n-2$ condições semelhantes à anterior, ou seja, de

$$Y'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2' + \cdots + u_n'y_n') + (u_1y_1'' + u_2y_2'' + \cdots + u_ny_n'')$$

obtemos: $$u_1'y_1' + u_2'y_2' + \cdots + u_n'y_n' = 0$$

Assim obtemos as condições $$u_1'y_1^{(m)} + u_2'y_2^{(m)} + \cdots + u_n'y_n^{(m)} = 0 \qquad m = 1, \ldots, n-2$$

Como resultado dessas condições, segue que as expressões para Y'', . . . , $Y^{(n-1)}$ se reduzem a:

$$Y^{(m)} = u_1y_1^{(m)} + \cdots + u_ny_n^{(m)} \qquad m = 2, 3, \ldots, n-1$$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Finalmente, precisamos impor a condição de que Y tem que ser solução da equação diferencial. Calculando $Y^{(n-1)}$ obtemos:

$$Y^{(n)} = \left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right) + \left(u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}\right)$$

Para satisfazer a equação diferencial, substituímos Y e todas suas derivadas obtidas na equação inicial...

$$y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t) y' + p_n(t) y = g(t)$$

Depois agrupamos os termos envolvendo cada uma das funções $y_1, \dots, y_n$ e suas derivadas.

Segue que a maioria dos termos desaparece porque cada uma das funções $y_1, \dots, y_n$ é uma solução da equação inicial e, portanto, $L[y_i] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Os termos restantes fornecem a relação

$$u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(t)$$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Esta equação $u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(t)$

junto com a primeira condição $u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0$

e as outras (n-2) condições $u_1' y_1^{(m)} + u_2' y_2^{(m)} + \cdots + u_n' y_n^{(m)} = 0 \qquad m = 1, \ldots, n-2$

fornecem n equações algébricas lineares não homogêneas simultâneas para u'_1, u'_2, …, u'_n

$$
\begin{aligned}
&u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_1 = 0 \\
&u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' = 0 \\
&u_1' y_1'' + \cdots + u_n' y_n'' = 0 \\
&\vdots \\
&u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(t)
\end{aligned}
$$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Este é um sistema algébrico linear para as quantidades desconhecidas u'_1, u'_2, ..., u'_n.

Resolvendo esse sistema e integrando as expressões resultantes, você pode obter os coeficientes $u_1, \dots, u_n$.

Uma condição suficiente para a existência de uma solução desse sistema de equações é que o determinante da matriz dos coeficientes não seja nulo para cada valor de t.

No entanto, o determinante da matriz dos coeficientes é exatamente $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$, que nunca se anula, já que $y_1, \dots, y_n$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea.

Portanto, é possível determinar u'_1, u'_2, ..., u'_n.

Usando a regra de Cramer, podemos escrever a solução do sistema de equações na forma

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

$$u_m'(t) = \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)} \qquad m = 1, 2 \dots, n \qquad \text{em que } W(t) = W(y_1, \dots, y_n)(t)$$

W_m é o determinante obtido de W substituindo a m-ésima coluna pela coluna (0, 0, . . . , 0, 1).

Integrando obtemos... $$u_m(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)W_m(s)}{W(s)} ds \qquad m = 1, \dots, n$$

Com essa notação, uma solução particular da equação original é obtida por integração:

$$Y(t) = \sum_{m=1}^{n} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{g(s)W_m(s)}{W(s)} ds \right] y_m(t)$$

em que t_0 é arbitrário

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 1

determine uma solução particular da seguinte equação diferencial em função de uma integral

$$y''' - y'' - y' + y = g(t)$$

Sabendo que $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t \cdot e^t$ e $y_3(t) = e^{-t}$ são soluções da equação homogênea associada, e sabemos que uma solução particular é dada por:

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{3} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s} W_k(s)}{W(s)} ds \right] y_k(t)$$

Vamos calcular W(t) que vai dentro da integral...

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Exemplo 1

$$W(t) = W(e^t, te^t, e^{-t}) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}$$

Colocando em evidência e retirando do determinante e^t nas duas primeiras colunas e e^{-t} da terceira coluna (ou seja teríamos $e^t \cdot e^t \cdot e^{-t} = e^t$), obtemos

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & (t+1) & -1 \\ 1 & (t+2) & 1 \end{vmatrix}$$

Subtraindo, então, a primeira linha da segunda e da terceira, temos

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalmente, calculando este último determinante vemos que $W(t) = 4e^t$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Exemplo 1

A seguir calculamos $W_1(t)$
$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = -2t-1$$

Da mesma forma para $W_2(t)$ e $W_3(t)$...

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = 2 \qquad W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}$$

Substituímos esses resultados na expressão
$$Y(t) = \sum_{k=1}^{3} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s} W_k(s)}{W(s)} ds \right] y_k(t)$$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Exemplo 1

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{3} \left[\int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s} W_k(s)}{W(s)} ds \right] y_k(t)$$

$$= e^t \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)(-2s-1)}{4e^s} ds + te^t \int_{t_0}^{t} \frac{2g(s)}{4e^s} ds + e^{-t} \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)e^{2s}}{4e^s} ds$$

$$= \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t} \left\{ e^{t-s}[-1 + 2(t-s)] + e^{-(t-s)} \right\} g(s) ds$$

Dependendo da função específica g(t), pode ser possível, ou não, calcular as integrais.

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço