LISTA 05_2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Soluções por séries de potências parte I
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 14:

(a) Procure soluções em séries de potências da equação diferencial dada em torno do ponto dado x_0; encontre a relação de recorrência.

(b) Encontre os quatro primeiros termos em cada uma das duas soluções y_1 e y_2 (a menos que a série termine antes).

(c) Calculando o wronskiano $W(y_1, y_2)(x_0)$, mostre que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

(d) Se possível, encontre o termo geral em cada solução.

1. $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
2. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
3. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
4. $y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k$ constante
5. $(1 - x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
6. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$
7. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
8. $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$
9. $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x_0 = 0$
10. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
11. $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
12. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
13. $2y'' + xy' + 3y = 0, \quad x_0 = 0$
14. $2y'' + (x + 1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = 2$

Em cada um dos problemas de 15 a 18:

(a) Encontre os cinco primeiros termos não nulos na solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça gráficos (utilizando algum software) das aproximações da solução com quatro e cinco termos no mesmo conjunto de eixos.

(c) Estime, a partir dos gráficos no item (b), o intervalo no qual a aproximação com quatro termos é razoavelmente precisa.

15. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1;$ veja o Problema 2

16. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3;$ veja o Problema 6

17. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1;$ veja o Problema 7

18. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2;$ veja o Problema 12

19. (a) Fazendo a mudança de variável x – 1 = t e supondo que y tem uma série de Taylor em potências em t, encontre duas soluções da equação

$$y'' + (x - 1)\, 2\, y' + (x^2 - 1)\, y = 0$$

em séries de potências de x – 1.

(b) Mostre que você obtém o mesmo resultado diretamente supondo que y é dado por uma série de Taylor em potências de x – 1 e expressando o coeficiente $x^2 - 1$ em potências de x – 1.

20. Mostre diretamente, usando o teste da razão, que as duas soluções em série em torno do ponto x = 0 da equação de Airy convergem para todo x; veja o texto da aula.

21. A Equação de Hermite. A equação

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

em que λ é constante, é conhecida como a equação de Hermite. Essa é uma equação importante em física matemática.

(a) Encontre os quatro primeiros termos em cada uma de duas soluções em torno de x = 0 e mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções.

(b) Note que, se λ for um inteiro par não negativo, então uma ou outra das soluções em série termina e torna-se um polinômio. Encontre as soluções polinomiais para λ = 0, 2, 4, 6, 8 e 10. Note que cada polinômio é determinado a menos de uma constante multiplicativa.

(c) O polinômio de Hermite $H_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Hermite com $\lambda = 2n$ para a qual o coeficiente de x^n é 2^n. Encontre $H_0(x), \ldots, H_5(x)$.

22. Considere o problema de valor inicial.

$$\boldsymbol{y' = \sqrt{1 - y^2} \qquad y(0) = 0}$$

(a) Mostre que y = sen x é a solução desse problema de valor inicial.

(b) Procure uma solução do problema de valor inicial em forma de série de potências em torno de x = 0. Encontre os coeficientes dessa série até o termo contendo x^3.

Em cada um dos problemas de 23 a 28, com a ajuda de um software, faça o gráfico de diversas somas parciais da solução em série do problema de valor inicial dado em torno de x = 0, obtendo, assim, gráficos análogos aos apresentados nas aulas para a equação de Airy em torno de x=0 e de x=1 (slides 10 e 20 da aula)

23. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$ veja o Problema 2
24. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$ veja o Problema 6
25. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$ veja o Problema 7
26. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$ veja o Problema 10
27. $y'' + x^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$ veja o Problema 4
28. $(1 - x)y'' + xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

RESPOSTAS

1. **(a)** $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1)$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x$$
$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{senh} x$$

2. **(a)** $a_{n+2} = a_n/(n+2)$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$
$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. **(a)** $(n+2)a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$

(b) $y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$

$y_2(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$

4. **(a)** $a_{n+4} = -k^2 a_n/(n+4)(n+3)$; $a_2 = a_3 = 0$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 - \frac{k^2x^4}{3\cdot 4} + \frac{k^4x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{k^6x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots$$
$$= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdots(4m+3)(4m+4)}$$
$$y_2(x) = x - \frac{k^2x^5}{4\cdot 5} + \frac{k^4x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{k^6x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots$$
$$= x\left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots(4m+4)(4m+5)}\right]$$

Sugestão: Faça $n = 4m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

5. **(a)** $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$, $n \geq 1$; $a_2 = -\frac{1}{2}a_0$

(b) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots$, $y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{24}x^5 + \cdots$

6. **(a)** $a_{n+2} = -(n^2 - 2n + 4)a_n/[2(n+1)(n+2)]$, $n \geq 2$; $a_2 = -a_0$, $a_3 = -\frac{1}{4}a_1$

(b) $y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \cdots$,

$y_2(x) = x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 - \frac{19}{1920}x^7 + \cdots$

7. **(a)** $a_{n+2} = -a_n/(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1\cdot 3} - \frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

$n=1$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

8. **(a)** $a_{n+2} = -[(n+1)^2 a_{n+1} + a_n + a_{n-1}]/(n+1)(n+2), \quad n = 1, 2, \ldots$

$a_2 = -(a_0 + a_1)/2$

(b) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \cdots$

$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$

9. **(a)** $(n+2)(n+1)a_{n+}2 + (n-2)(n-3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) $y_1(x) = 1 - 3x^2, \quad y_2(x) = x - x^3/3$

10. **(a)** $4(n+2)a_{n+2} - (n-2)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad y_2(x) = x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240} - \frac{x^7}{2240} - \cdots - \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n-1)(2n+1)} - \cdots$$

11. **(a)** $3(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{5}{432}x^6 + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n} + \cdots$$
$$y_2(x) = x + \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{135}x^5 + \frac{16}{945}x^7 + \cdots + \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3^n\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots$$

12. **(a)** $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + (n-1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad y_2(x) = x$$
$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^7}{210} + \cdots + (-1)^n\frac{4\cdot 6\cdots(2n+2)}{2^n(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

13. **(a)** $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

(b, d)
$$y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{32}x^4 - \frac{7}{384}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n(2n)!}x^{2n} + \cdots$$
$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^7}{210} + \cdots + (-1)^n\frac{4\cdot 6\cdots(2n+2)}{2^n(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

14. **(a)** (a) $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) $y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{8}(x-2)^3 + \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$

$y_2(x) = (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + \frac{9}{64}(x-2)^4 + \cdots$

15. **(a)** $y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots$

(c) aproximadamente $|x| < 0{,}7$

16. **(a)** $y = -1 + 3x + x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$

(c) aproximadamente $|x| < 0{,}7$

17. **(a)** $y = 4 - x - 4x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \cdots$

(c) aproximadamente $|x| < 0{,}5$

18. **(a)** $y = -3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$

(c) aproximadamente $|x| < 0{,}9$

19. **(a)** $y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{18}(x-1)^6 + \cdots$

$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + \frac{1}{28}(x-1)^7 + \cdots$

21. **(a)** $y_1(x) = 1 - \dfrac{\lambda}{2!}x^2 + \dfrac{\lambda(\lambda-4)}{4!}x^4 - \dfrac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8)}{6!}x^6 + \cdots$

$y_2(x) = x - \dfrac{\lambda-2}{3!}x^3 + \dfrac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5!}x^5 - \dfrac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)}{7!}x^7 + \cdots$

(b) $1,\ x,\ 1 - 2x^2,\ x - \frac{2}{3}x^3,\ 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4,\ x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$

(c) $1,\ 2x,\ 4x^2 - 2,\ 8x^3 - 12x,\ 16x^4 - 48x^2 + 12,\ 32x^5 - 160x^3 + 120x$

22. **(b)** $y = x - x^3/6 + \cdots$