LISTA 06_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Sistema de equações lineares de primeira ordem: Introdução
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 4, transforme a equação dada em um sistema de equações de primeira ordem.

1. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 0$
2. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 3 \text{ sen } t$
3. $t^2u'' + tu' + (t^2 - 0{,}25)u = 0$
4. $u^{(4)} - u = 0$

Em cada um dos Problemas 5 e 6, transforme o problema de valor inicial dado em um problema de valor inicial para duas equações de primeira ordem.

5. $u'' + 0{,}25u' + 4u = 2 \cos 3t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2$
6. $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0$

7. Sistemas de equações de primeira ordem podem ser transformados, algumas vezes, em uma única equação de ordem maior. Considere o sistema

$$x_1' = -2x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - 2x_2.$$

(a) Resolva a primeira equação para x_2 e substitua na segunda equação, obtendo, assim, uma equação de segunda ordem para x_1. Resolva essa equação para x_1 e depois determine também x_2.

(b) Encontre a solução do sistema dado que também satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$.

(c) Esboce a curva, para $t \geq 0$, dada em forma paramétrica pelas expressões para x_1 e x_2 encontradas em (b).

Em cada um dos problemas de 8 a 12, proceda como no Problema 7.

(a) Transforme o sistema dado em uma única equação de segunda ordem.

(b) Encontre x1 e x2 que satisfazem, também, as condições iniciais dadas.

(c) Esboce o gráfico da solução no plano x1x2 para $t \geq 0$.

8. $x_1' = 3x_1 - 2x_2, \qquad x_1(0) = 3$

$x_2' = 2x_1 - 2x_2, \qquad x_2(0) = \frac{1}{2}$

9. $x_1' = 1{,}25x_1 + 0{,}75x_2, \qquad x_1(0) = -2$

$x_2' = 0{,}75x_1 + 1{,}25x_2, \qquad x_2(0) = 1$

10. $x_1' = x_1 - 2x_2, \qquad x_1(0) = -1$

$x_2' = 3x_1 - 4x_2, \qquad x_2(0) = 2$

11. $x_1' = 2x_2, \qquad x_1(0) = 3$

$x_2' = -2x_1, \qquad x_2(0) = 4$

12. $x_1' = -0{,}5x_1 + 2x_2, \qquad x_1(0) = -2$

$x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2, \qquad x_2(0) = 2$

13. Transforme as duas equações da aula para o circuito RLC paralelo (slide 5) em uma única equação de segunda ordem.

14. Mostre que, se a_{11}, a12, a_{21} e a_{22} forem constantes, com a_{12} e a_{21} sem serem nulos ao mesmo tempo, e, se as funções g_1 e g_2 forem diferenciáveis, então o problema de valor inicial

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \qquad x_1(0) = x_1^0$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \qquad x_2(0) = x_2^0$$

poderá ser transformado em um problema de valor inicial para uma única equação de segunda ordem. Pode-se usar o mesmo procedimento, se $a_{11}, \ldots, a_{22}$ forem funções de t?

15. Considere o sistema linear homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y,$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y.$$

Mostre que, se $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ e $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ forem duas soluções do sistema dado, então $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também será solução, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2. Esse é o princípio da superposição.

16. Sejam $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ e $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ duas soluções do sistema linear não homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t),$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t).$$

Mostre que $x = x_1(t) - x_2(t)$, $y = y_1(t) - y_2(t)$ é uma solução do sistema homogêneo associado.

17. Feito em aula (dedução das equações do sistema massa-mola)

18. Transforme o sistema de equações de segunda ordem do sistema massa-mola em um sistema de primeira ordem fazendo $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3= x_1'$, $y_4= x_2'$

Circuitos Elétricos. A teoria de circuitos elétricos, do tipo RLC paralelo ilustrado na aula, consistindo em indutores, resistências e capacitores, baseia-se nas leis de Kirchhoff a seguir: (1) o fluxo total de corrente atravessando cada nó (ou junção) é zero; (2) a diferença de tensão total em cada laço fechado é zero.
Além das leis de Kirchhoff, temos, também, a relação entre a corrente I em ampères passando por cada elemento do circuito e a diferença de potencial V naquele elemento:

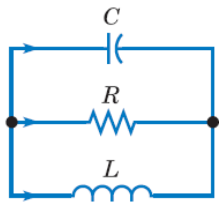
$$V = RI, \qquad R = \text{resistência em ohms;}$$

$$C\frac{dV}{dt} = I, \qquad C = \text{capacitância em farads;}$$

$$L\frac{dI}{dt} = V, \qquad L = \text{indutância em henrys.}$$

As leis de Kirchhoff e a relação entre corrente e diferença de tensão em cada elemento do circuito fornecem um <u>**sistema de equações algébricas e diferenciais**</u> de onde é possível determinar a diferença de tensão e a corrente em todo o circuito. Os problemas de 19 a 21 ilustram o procedimento que acabamos de descrever.

19. Considere o circuito RLC paralelo da figura. Sejam I_1, I_2 e I_3 as correntes atravessando, respectivamente, o capacitor, a resistência e o indutor. Analogamente, sejam V_1, V_2 e V_3 as diferenças de tensão correspondentes. As setas denotam as direções, escolhidas arbitrariamente, nas quais as correntes e diferenças de tensão serão consideradas positivas.



(a) Aplicando a segunda lei de Kirchhoff ao laço superior do circuito, mostre que

$$V_1 - V_2 = 0$$

De maneira análoga, mostre que

$$V_2 - V_3 = 0$$

(b) Aplicando a primeira lei de Kirchhoff a qualquer dos nós no circuito, mostre que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

(c) Use a relação entre a corrente e a diferença de tensão em cada elemento do circuito para obter as equações

$$CV_1' = I_1, \qquad V_2 = RI_2, \qquad LI_3' = V_3.$$

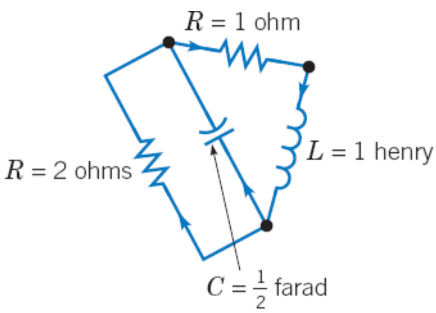
(d) Elimine V2, V3, I1 e I2 das equações de (i) a (iv) para obter

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \qquad LI_3' = V_1$$

Observe que, se omitirmos os índices nas nessas equações teremos o sistema do slide 5 da aula.

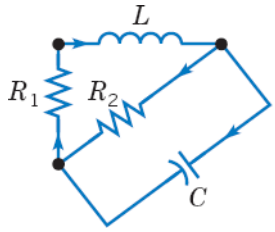
20. Considere o circuito ilustrado na figura abaixo e use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dI}{dt} = -I - V, \qquad \frac{dV}{dt} = 2I - V$$

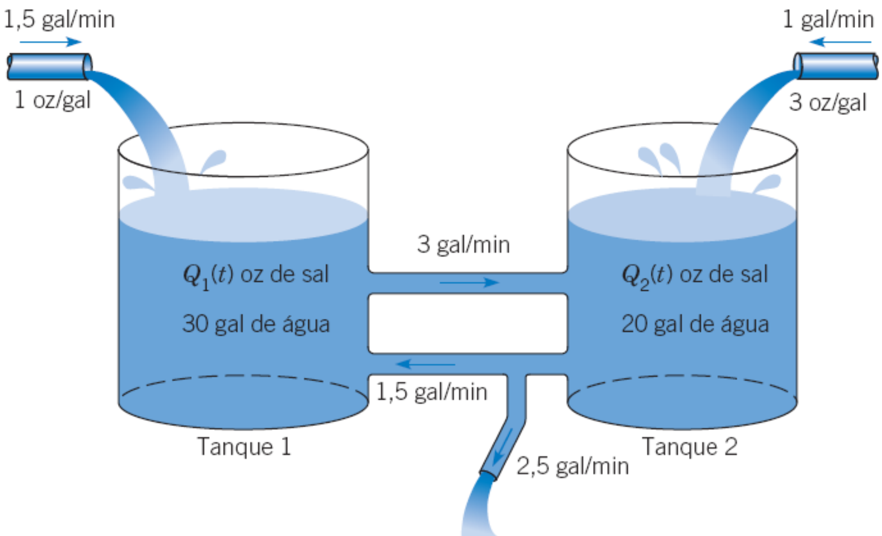


21. Considere o circuito ilustrado na figura abaixo. Use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$L\frac{dI}{dt} = -R_1 I - V, \qquad C\frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}$$



22. Considere os dois tanques interligados ilustrados na figura abaixo. O Tanque 1 contém, inicialmente, 30 gal de água e 25 oz de sal, enquanto o Tanque 2 contém, inicialmente, 20 gal de água e 15 oz de sal. Entra no Tanque 1 uma mistura de água contendo 1 oz/gal de sal a uma taxa de 1,5 gal/min. A mistura flui do Tanque 1 para o Tanque 2 a uma taxa de 3 gal/min. Entra, também, no Tanque 2 (vindo de fora) uma mistura de água contendo 3 oz/gal de sal a uma taxa de 1 gal/min. A mistura escorre do Tanque 2 a uma taxa de 4 gal/min e parte dela volta para o Tanque 1 a uma taxa de 1,5 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.



(a) Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, respectivamente, as quantidades de sal em cada tanque no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais que modelam o processo de fluxo. Observe que o sistema de equações diferenciais é não homogêneo.

(b) Encontre os valores de Q_1 e Q_2 para os quais o sistema está em equilíbrio, ou seja, não varia com o tempo. Sejam Q_1^E e Q_2^E os valores de equilíbrio. Você pode prever qual tanque atingirá seu estado de equilíbrio mais rapidamente?

(c) Sejam $x_1(t) = Q_1(t)-Q_1^E$ e $x_2(t) = Q_2(t)-Q_2^E$. Determine um problema de valor inicial para x_1 e x_2. Observe que o sistema de equações para x_1 e x_2 é homogêneo.

23. Considere dois tanques interligados de maneira análoga aos da figura do problema anterior. O Tanque 1 contém, inicialmente, 60 gal de água e $Q_{1,0}$ oz de sal, enquanto o Tanque 2 contém, inicialmente, 100 gal de água e $Q_{2,0}$ oz de sal. Está entrando no Tanque 1, a uma taxa de 3 gal/min, uma mistura de água contendo q_1 oz/gal. A mistura no Tanque 1 sai a uma taxa de 4 gal/min, da qual metade entra no Tanque 2, enquanto o restante deixa o sistema. O Tanque 2 recebe de fora uma mistura de água com q_2 oz/gal de sal a uma taxa de 1 gal/min. A mistura no Tanque 2 sai a uma taxa de 3 gal/min, mas uma parte disso volta para o Tanque 1 a uma taxa de 1 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.

(a) Desenhe um diagrama que ilustre o processo de fluxo descrito acima. Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, respectivamente, as quantidades de sal em cada tanque no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais para Q_1 e Q_2 que modelam o processo de fluxo.

(b) Encontre os valores de equilíbrio Q_1^E e Q_2^E em função das concentrações q_1 e q_2.

(c) É possível (ajustando q_1 e q_2) obter $Q_1^E = 50$ e $Q_2^E = 60$ como um estado de equilíbrio?

(d) Descreva os estados de equilíbrio possíveis para esse sistema para diversos valores de q_1 e q_2.

RESPOSTAS

1. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2$

2. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2 + 3 \text{ sen } t$

3. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(1 - 0{,}25t^{-2})x_1 - t^{-1}x_2$

4. $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_1$

5. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -4x_1 - 0{,}25x_2 + 2 \cos 3t, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2$

6. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + g(t); \quad x_1(0) = u_0, \quad x_2(0) = u_0'$

7. **(a)** $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}, \quad x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$

(b) $c_1 = 5/2, \quad c_2 = -1/2$ em solução em (a)

(c) O gráfico se aproxima da origem no primeiro quadrante tangente à reta $x_1 = x_2$.

8. **(a)** $x_1'' - x_1' - 2x_1 = 0$

(b) $x_1 = \frac{11}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}, \qquad x_2 = \frac{11}{6}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$

(c) O gráfico é assintótico à reta $x_1 = 2x_2$ no primeiro quadrante.

9. **(a)** $2x_1'' - 5x_1' + 2x_1 = 0$

(b) $x_1 = -\frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}, \qquad x_2 = \frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}$

(c) O gráfico é assintótico à reta $x_1 = x_2$ no terceiro quadrante.

10. **(a)** $x_1'' + 3x_1' + 2x_1 = 0$

(b) $x_1 = -7e^{-t} + 6e^{-2t}, \quad x_2 = -7e^{-t} + 9e^{-2t}$

(c) O gráfico se aproxima da origem no terceiro quadrante tangente à reta $x_1 = x_2$.

11. **(a)** $x_1'' + 4x_1 = 0$

(b) $x_1 = 3 \cos 2t + 4 \text{ sen } 2t, \quad x_2 = -3 \text{ sen } 2t + 4 \cos 2t$

(c) O gráfico é um círculo centrado na origem com raio 5 percorrido no sentido horário.

(c) O gráfico é um círculo centrado na origem com raio 5 percorrido no sentido horário.

12. **(a)** $x_1'' + x_1' + 4{,}25x_1 = 0$

(b) $x_1 = -2e^{-t/2} \cos 2t + 2e^{-t/2} \text{ sen } 2t, \quad x_2 = 2e^{-t/2} \cos 2t + 2e^{-t/2} \text{ sen } 2t$

(c) O gráfico é uma espiral se aproximando da origem no sentido horário.

13. $LRCI'' + LI' + RI = 0$

18. $y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4, \quad m_1y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2y_2 + F_1(t), \quad m_2y_4' = k_2y_1 - (k_2 + k_3)y_2 + F_2(t)$

22. **(a)**

$$Q_1' = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}Q_1 + \frac{3}{40}Q_2, \quad Q_1(0) = 25, \quad Q_2' = 3 + \frac{1}{10}Q_1 - \frac{1}{5}Q_2, \quad Q_2(0) = 15$$

(b) $Q_1^E = 42, \quad Q_2^E = 36$

(c) $x_1' = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{3}{40}x_2, \quad x_1(0) = -17, \quad x_2' = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{5}x_2, \quad x_2(0) = -21$

23. **(a)** $Q_1' = 3q_1 - \frac{1}{15}Q_1 + \frac{1}{100}Q_2, \quad Q_1(0) = Q_1^0$

$Q_2' = q_2 + \frac{1}{30}Q_1 - \frac{3}{100}Q_2, \quad Q_2(0) = Q_2^0$

(b) $Q_1^E = 6(9q_1 + q_2), \quad Q_2^E = 20(3q_1 + 2q_2)$

(c) Não

(d) $\frac{10}{9} \leq Q_2^E/Q_1^E \leq \frac{20}{3}$