LISTA 06_3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Sistema de equações homogêneas
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6:

(a) Encontre a solução geral do sistema de equações dado e descreva o comportamento das soluções quando t → ∞.

(b) Desenhe um campo de direções e faça o gráfico de algumas trajetórias do sistema.

1. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

2. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

4. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

5. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

6. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 7 e 8:

(a) Encontre a solução geral do sistema de equações dado.

(b) Desenhe um campo de direções e algumas das trajetórias. Em cada um desses problemas, a matriz de coeficientes tem um autovalor nulo. Como resultado, o padrão das trajetórias é diferente dos padrões nos exemplos no texto.

7. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

8. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos problemas de 9 a 14, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

9. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

10. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

11. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

12. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

13. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

14. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos problemas de 15 a 18, resolva o problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

15. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

16. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

17. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

19. O sistema $t\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é análogo à equação de Euler de segunda ordem. Supondo que $\mathbf{x} = \xi t^r$, em que ξ é um vetor constante, mostre que ξ e r têm que satisfazer $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$ para obter soluções não triviais da equação diferencial dada.

Referindo-se ao Problema 19, resolva o sistema de equações dado em cada um dos problemas de 20 a 23. Suponha em todos os casos que $t > 0$.

20. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

21. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

22. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

23. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos problemas de 24 a 27, são dados os autovalores e autovetores de uma matriz **A**. Considere o sistema correspondente $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(a) Esboce um retrato de fase do sistema.

(b) Esboce a trajetória que contém o ponto inicial (2, 3).

(c) Para a trajetória no item (b), esboce os gráficos de x_1 e de x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.

24. $r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

25. $r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

26. $r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

27. $r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

28. Considere um sistema 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Se supusermos que $r_1 \neq r_2$, a solução geral será $\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$ desde que $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ sejam linearmente independentes. Nesse problema, vamos estabelecer a independência linear de $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ supondo que são linearmente dependentes e, depois, mostrando que isto nos leva a uma contradição.

(a) Note que $\xi^{(1)}$ satisfaz a equação matricial $(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\,\xi^{(1)} = \mathbf{0}$; analogamente, $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\,\xi^{(2)} = \mathbf{0}$.

(b) Mostre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\,\xi^{(1)} = (r_1 - r_2)\xi^{(1)}$.

(c) Suponha que $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são linearmente dependentes. Então $c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} = 0$ e pelo menos um entre c_1 e c_2 é diferente de zero; suponha que $c_1 \neq 0$. Mostre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = 0$ e que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = (r_1 - r_2)\xi^{(1)}$. Logo, $c_1 = 0$, uma contradição. Portanto, $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são linearmente independentes.

(d) Modifique o argumento no item (c) para o caso em que $c_2 \neq 0$.

(e) Faça um argumento semelhante para o caso em que a ordem n é igual a 3; note que o procedimento pode ser estendido para um valor arbitrário de n.

29.Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{(i)}$$

em que a, b e c são constantes com $a \neq 0$.
Já foi mostrado (aulas 03), que a solução geral depende das raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \quad \text{(ii)}$$

(a) Transforme a Eq. (i) em um sistema de equações de primeira ordem fazendo $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Encontre o sistema de equações $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ satisfeito por $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(b) Encontre a equação que determina os autovalores da matriz de coeficientes **A** no item (a). Note que essa equação é, simplesmente, a equação característica (ii) da Eq. (i).

30.O sistema de dois tanques do Problema 22 na aula 06_1 nos leva ao problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -17 \\ -21 \end{pmatrix},$$

em que x_1 e x_2 são os desvios dos níveis de sal Q_1 e Q_2 dos seus respectivos pontos de equilíbrio.

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça os gráficos de x_1 e de x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.

(c) Encontre o menor instante T tal que $|x_1(t)| \leq 0,5$ e $|x_2(t)| \leq 0,5$ para todo $t \geq T$.

31. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(a) Resolva o sistema para α = 0,5. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.

(b) Resolva o sistema para α = 2. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.

(c) As soluções encontradas em (a) e (b) exibem dois tipos de comportamento bem diferentes. Encontre os autovalores da matriz de coeficientes em função de α e determine o valor de α entre 0,5 e 2 em que ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro.

Circuitos Elétricos. Os Problemas 32 e 33 tratam do circuito elétrico descrito pelo sistema de equações diferenciais dado no Problema 21 da aula 06.1:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}.$$

32.(a) Encontre a solução geral da Eq. (i) se $R_1 = 1\ \Omega, R_2 = \frac{3}{5}\ \Omega, L = 2\ \mathrm{H}, \text{e } C = \frac{2}{3}\ \mathrm{F}.$

(b) Mostre que I(t) → 0 e V(t) → 0 quando t → ∞, independente dos valores iniciais I(0) e V(0).

33.Considere o sistema precedente de equações diferenciais (i).

(a) Encontre uma condição que R_1, R_2, C e L têm que satisfazer para que os autovalores da matriz de coeficientes sejam reais e distintos.

(b) Se a condição encontrada no item (a) for satisfeita, mostre que ambos os autovalores serão negativos. Depois, mostre que I(t) → 0 e V(t) → 0 quando t → ∞, independente das condições iniciais.

(c) Se a condição encontrada no item (a) não for satisfeita, então os autovalores serão complexos ou repetidos. Você acredita que I(t) → 0 e V(t) → 0 quando t → ∞ também nesses casos?

Sugestão: Uma abordagem possível para o item (c) é transformar o sistema (i) em uma única equação de segunda ordem.

RESPOSTAS

1. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

2. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$

3. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$

4. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

5. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

6. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

7. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$

8. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

9. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2t}$

10. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-it}$

11. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

12. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$

13. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

14. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

15. $\mathbf{x} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$

16. $\mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t}$

17. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

18. $\mathbf{x} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} e^{4t}$

20. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

21. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^{4}$

22. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-2}$

23. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^{2}$

29. **(a)** $x'_1 = x_2$, $x'_2 = -(c/a)x_1 - (b/a)x_2$

30. **(a)** $\mathbf{x} = -\frac{55}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t/20} + \frac{29}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t/4}$

31. **(a)** $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2+\sqrt{2})t/2} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2-\sqrt{2})t/2}; \qquad r_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{2})/2; \quad$ nó

(b) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t}; \qquad r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; \quad$ ponto de sela

(c) $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\alpha}; \quad \alpha = 1$

32. **(a)** $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

33. **(a)** $\left(\dfrac{1}{CR_2} - \dfrac{R_1}{L} \right)^2 - \dfrac{4}{CL} > 0$