LISTA 06_5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Sistema de equações. Matrizes fundamentais
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 10:

(a) Encontre uma matriz fundamental para o sistema de equações dado.

(b) Encontre, também, a matriz fundamental **Φ**(t) que satisfaz **Φ**(0) = **I**.

1. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

2. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

4. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

5. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

6. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

7. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

11. Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

usando a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ encontrada no Problema 3.

12. Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

usando a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ encontrada no Problema 6.

13. Mostre que $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$, em que $\mathbf{\Phi}(t)$ e $\mathbf{\Psi}(t)$ são as definidas nesta aula 06_5.

14 A matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ para o sistema do exemplo 1 da aula foi encontrada no Exemplo 2. Mostre que $\mathbf{\Phi}(t)\ \mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(t+s)$ multiplicando diretamente $\mathbf{\Phi}(t)$ e $\mathbf{\Phi}(s)$.

15 Seja $\Phi(t)$ a matriz fundamental satisfazendo $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$, $\Phi(0) = \mathbf{I}$. Na aula, definimos essa matriz também como $e^{\mathbf{A}t}$. Neste problema há que mostrar que Φ tem, de fato, as propriedades algébricas principais associadas à função exponencial.

(a) Mostre que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(t+s)$, ou seja, que $e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}s} = e^{\mathbf{A}(t+s)}$

Sugestão: Mostre que, se s estiver fixo e t for variável, ambas $\Phi(t)\Phi(s)$ e também $\Phi(t+s)$ satisfarão o problema de valor inicial $\mathbf{Z}' = \mathbf{AZ}$, $\mathbf{Z}(0) = \Phi(s)$.

(b) Mostre que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-t)=\mathbf{I}$, ou seja, $e^{\mathbf{A}t}\ e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$. Depois, mostre que $\mathbf{\Phi}(-t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

(c) Mostre que $\mathbf{\Phi}(t - s) = \mathbf{\Phi}(t)\ \mathbf{\Phi}^{-1}(s)$.

16. Mostre que, se **A** for uma matriz diagonal com elementos diagonais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então $e^{\mathbf{A}t}$ também será uma matriz diagonal com elementos diagonais $e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \ldots, e^{a_n t}$.

17 Considere um oscilador satisfazendo o problema de valor inicial

$$u'' + \omega^2 u = 0, \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$$

(a) Sejam $x_1 = u$, $x_2 = u'$ coloque as equações na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

b) Usando a série $\boldsymbol{e^{At}} = \boldsymbol{I} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A^n t^n}}{\boldsymbol{n}!}$, mostre que

$$\exp \mathbf{A}t = \mathbf{I} \cos \omega t + \mathbf{A} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega}$$

(c) Encontre a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

RESPOSTAS

1. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$

2. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} & e^{-t/2} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{-t/2} - \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

3. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

4. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \\ -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$

5. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t - 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

6. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\operatorname{sen} 2t \\ \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$

7. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \end{pmatrix}$

8. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen} t & -e^{-t}\operatorname{sen} t \\ 5e^{-t}\operatorname{sen} t & e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

9. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ \frac{5}{2}e^{-2t} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ \frac{7}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{2t} \end{pmatrix}$

10. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^{t} + e^{-2t} + e^{3t} \\ -\frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{x} = \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$

12. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}\cos 2t + \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} e^{-t}\operatorname{sen} 2t$

17. (c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \cos\omega t + \begin{pmatrix} v_0 \\ -\omega^2 u_0 \end{pmatrix} \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}$