LISTA 07_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Sistemas de equações lineares. Noções de estabilidade
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Para cada um dos problemas de 1 a 12:

(a) Encontre os autovalores e autovetores.
(b) Classifique o ponto crítico (0, 0) em relação ao tipo e determine se é estável, assintoticamente estável ou instável.
(c) Esboce diversas trajetórias no plano de fase e esboce, também, alguns gráficos típicos de x1 em função de t.
(d) Use um computador para fazer precisamente os gráficos pedidos no item (c).

1. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

9. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Em cada um dos problemas de 13 a 16, determine o ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ e depois classifique seu tipo e examine sua estabilidade fazendo a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}$.

13. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

14. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

16. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

17. A equação de movimento de um sistema mola-massa com amortecimento é

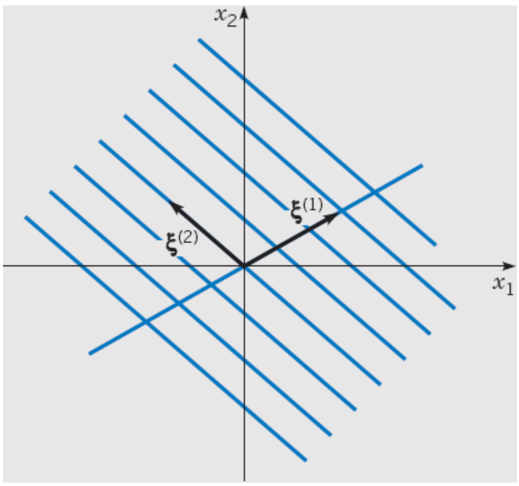
$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = 0,$$

em que m, c e k são positivos. Escreva essa equação de segunda ordem como um sistema de duas equações de primeira ordem para $x = u$, $y = du/dt$. Mostre que $x = 0$, $y = 0$ é um ponto crítico e analise a estrutura e a estabilidade do ponto crítico em função dos parâmetros m, c e k. Uma análise semelhante pode ser aplicada à equação do circuito elétrico

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0.$$

18. Considere o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e suponha que **A** tem um autovalor nulo.

(a) Mostre que det(A) = 0.
(b) Mostre que $\mathbf{x} = 0$ é um ponto crítico e que, além disso, todo ponto pertencente a determinada reta contendo a origem também é um ponto crítico.
(c) Sejam $r_1 = 0$ e $r_2 \neq 0$, e sejam $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ os autovetores associados. Mostre que as trajetórias são como as indicadas na figura abaixo. Qual é o sentido do movimento nas trajetórias?



Pontos críticos não isolados; $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$. Todo ponto pertencente à reta determinada por $\xi^{(1)}$ é um ponto crítico.

19. Neste problema, vamos indicar como mostrar que as trajetórias são elipses quando os autovalores são imaginários puros. Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{i}$$

(a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes são imaginários puros se, e somente se,

$$a_{11} + a_{22} = 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \tag{ii}$$

(b) As trajetórias do sistema (i) podem ser encontradas convertendo-se as Eqs. (i) em uma única equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \tag{iii}$$

Use a primeira das Eqs. (ii) para mostrar que a Eq. (iii) é exata.

(c) Integrando a Eq. (iii), mostre que

$$a_{21}x^2 + 2a_{22}xy - a_{12}y^2 = k, \tag{iv}$$

em que k é uma constante. Use as Eqs. (ii) para concluir que o gráfico da Eq. (iv) é sempre uma elipse.

Sugestão: Qual é o discriminante da forma quadrática na Eq. (iv)?

20. Considere o sistema linear

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \qquad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y,$$

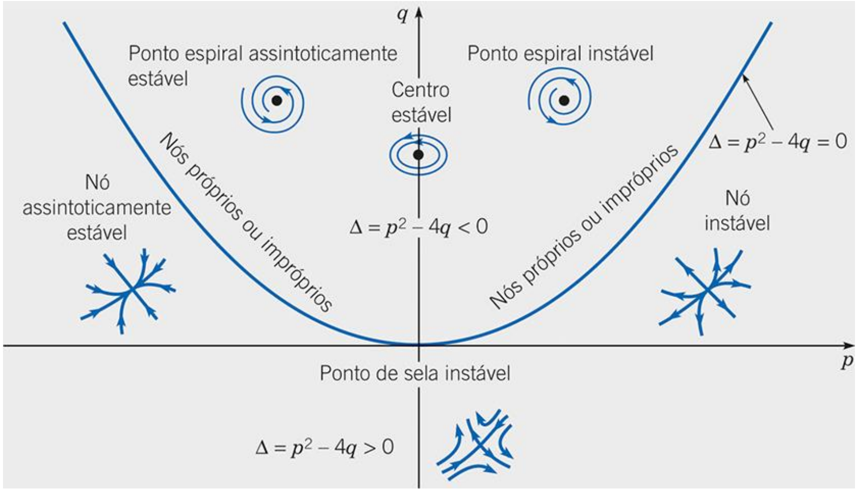
em que a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são constantes reais. Seja $p = a_{11} + a_{22}$, $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ e $\Delta = p^2 - 4q$. Note que p e q são, respectivamente, o traço e o determinante da matriz de coeficientes do sistema dado. Mostre que o ponto crítico (0, 0) é um

(a) Nó, se $q > 0$ e $\Delta \geq 0$;
(b) Ponto de sela, se $q < 0$;
(c) Ponto espiral, se $p \neq 0$ e $\Delta < 0$;
(d) Centro, se $p = 0$ e $q > 0$.

Sugestão: Essas conclusões podem ser obtidas estudando-se os autovalores r_1 e r_2. Também pode ajudar estabelecer e depois usar as relações $r_1r_2 = q$ e $r_1 + r_2 = p$.

21. Continuando o Problema 20, mostre que o ponto crítico (0, 0) é
(a) Assintoticamente estável, se $q > 0$ e $p < 0$;
(b) Estável, se $q > 0$ e $p = 0$;
(c) Instável, se $q < 0$ ou $p > 0$.

Os resultados dos Problemas 20 e 21 estão resumidos visualmente na figura.



RESPOSTAS

1. **(a)** $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 2)^T$; $r_2 = 2$, $\xi^{(2)} = (2, 1)^T$.
   (b) Ponto de sela, instável.
2. **(a)** $r_1 = 2$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 4$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$.
   (b) Nó, instável.
3. **(a)** $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 1$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$.
   (b) Ponto de sela, instável.
4. **(a)** $r_1 = r_2 = -3$; $\xi^{(1)} = (1, 1)^T$.
   (b) Nó impróprio, assintoticamente instável.
5. **(a)** $r_1, r_2 = -1 \pm i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$.
   (b) Ponto espiral, assintoticamente estável.
6. **(a)** $r_1, r_2 = \pm i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$.
   (b) Centro, estável.
7. **(a)** $r_1, r_2 = 1 \pm 2i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (1, 1 \mp i)^T$.
   (b) Ponto espiral, instável.
8. **(a)** $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$; $r_2 = -1/4$, $\xi^{(2)} = (4, -3)^T$.
   (b) Nó, assintoticamente estável.
9. **(a)** $r_1 = r_2 = 1$; $\xi^{(1)} = (2, 1)^T$.
   (b) Nó impróprio, instável.
10. **(a)** $r_1, r_2 = \pm 3i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2, -1 \pm 3i)^T$.
    (b) Centro, estável.
11. **(a)** $r_1 = r_2 = -1$; $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$, $\xi^{(2)} = (0, 1)^T$.
    (b) Nó próprio, assintoticamente estável.
12. **(a)** $r_1, r_2 = (1 \pm 3i)/2$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (5, 3 \mp i)^T$.
    (b) Ponto espiral, instável.
13. $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$; ponto de sela, instável.
14. $x_0 = -1$, $y_0 = 0$; $r_1 = -1$, $r_2 = -3$; nó, assintoticamente estável.
15. $x_0 = -2$, $y_0 = 1$; $r_1, r_2 = -1 \pm \sqrt{2}\, i$; ponto espiral, assintoticamente estável.
16. $x_0 = \gamma/\delta$, $y_0 = \alpha/\beta$; $r_1, r_2 = \pm\sqrt{\beta\delta}\, i$; centro, estável.
17. $c^2 > 4km$, nó, assintoticamente estável; $c^2 = 4km$, nó impróprio, assintoticamente estável; $c^2 < 4km$, ponto espiral, assintoticamente estável.