

7 Transformada Z

Aula 26 - Capítulo 7: páginas 1 e 2

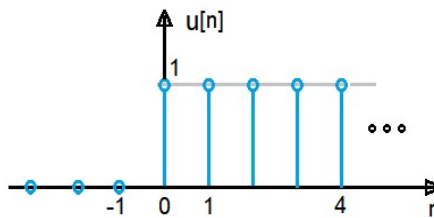
7.1 Exercício Resolvido

Calcule transformada z direta da sequência $x[n] = u[n]$.

- Passo 1: Gráfico da sequência $x[n]$.

A definição do degrau discreto estabelece

$$u[n] = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases}$$



- Passo 2: Usar a fórmula da definição (cap7/pag1).

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n].z^{-n}$$
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 0.z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 1.z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

- Passo 3: Soma dos termos da progressão geométrica.

Os termos da expressão de $X(z)$ formam um progressão geométrica de razão $1/z$ (valor que se multiplica um termo para obter o seguinte) cuja soma tem uma fórmula mais compacta dada por

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

onde N é o número de termos e q é a razão. Para $X(z)$ tem-se $N = \infty$ e $q = 1/z$, logo

$$X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - (1/z)^N}{1 - 1/z}$$

e considerando que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z}\right)^N = 0 \quad \text{somente se} \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

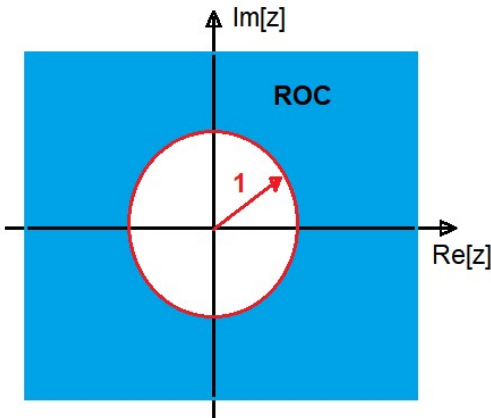
vem

$$X(z) = \frac{1 - 0}{1 - 1/z} \quad , \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

ou melhor

$$X(z) = \frac{z}{z - 1} \quad , \quad |z| > 1$$

No plano complexo z , o lugar geométrico dos pontos que satisfazem $|z| = 1$ se traduz numa circunferência de raio unitário com centro na origem, logo para $|z| > 1$ tem-se toda a região do plano complexo z exterior à essa circunferência. Essa região é denominada região de convergência da transformada z com a sigla ROC (do inglês 'region of convergence) ou RDC (em português 'região de convergência'). A definição da ROC é necessária na transformada z porque duas ou mais seqüências distintas podem ter a mesma função de z como transformada, porém, devido ao fato de suas ROCs não serem coincidentes, é possível identificar os pares transformados.



7.2 Exercício Proposto

Calcule transformada z direta da seqüência $x[n] = k^n \cdot u[n]$ onde k é uma constante numérica real.