3 aulas.

Capítulo 6. Sistemas de Tempo Contínuo

6.1. Definição

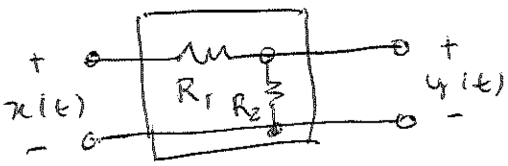
Um sistema é um processo físico que gera sinais de resposta a partir de sinais de estímulo.

O sistema pode ser representado por um modelo matemático que estabelece a correspondência (mapeamento) entre os sinais de estímulo (entrada) e de resposta (saída).

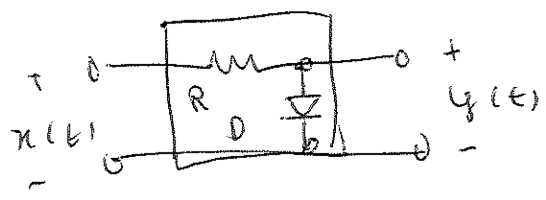
$$x(t) \longrightarrow \boxed{M} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = M[x(t)]$$

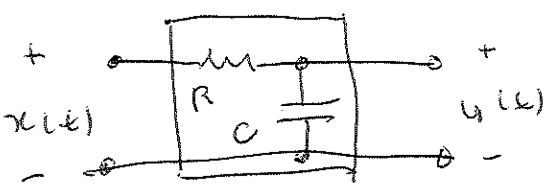
exemplos



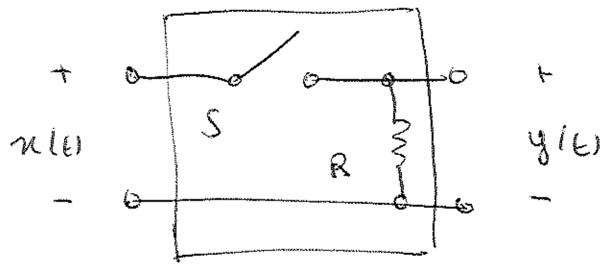
linear



não linear



com memória

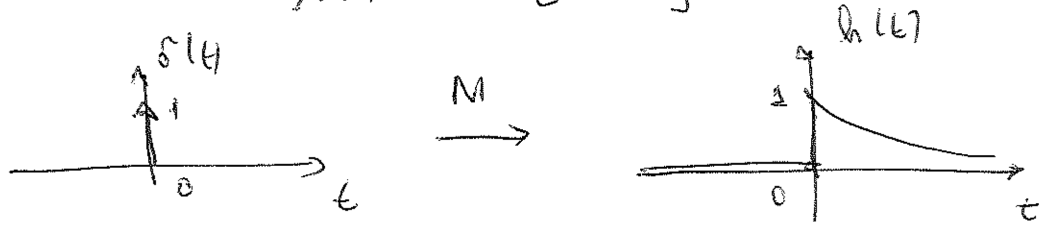


variante no tempo

6.2 Resposta ao impulso

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{M} \longrightarrow h(t)$$

$$h(t) = M\left[\delta(t)\right]$$

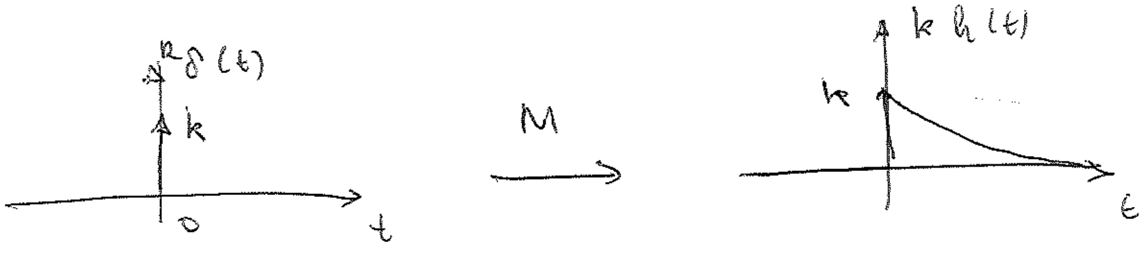


A função $h(t)$ é característica do sistema sendo denominada resposta ao impulso. Para ser fisicamente realizável, o sistema deve ser causal, ou seja, a resposta só ocorre após o estímulo, logo

$$h(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0 .$$

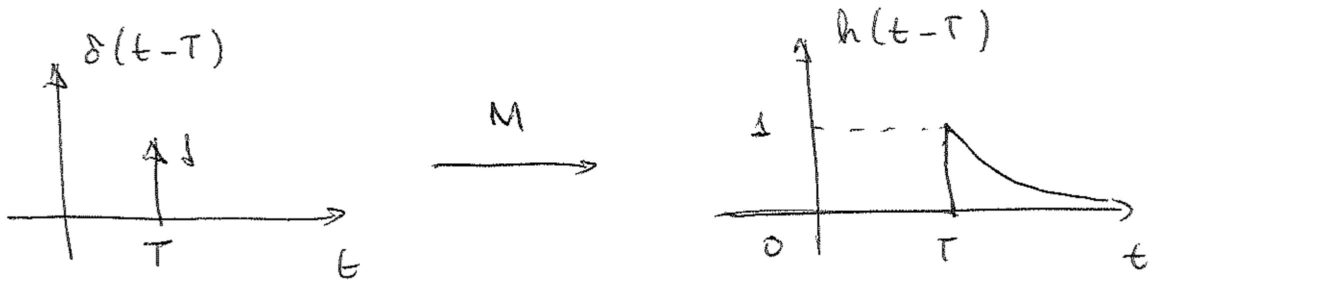
a) sistema linear

Se $h(t) = M\left[\delta(t)\right]$ então $M\left[k\delta(t)\right] = k\,h(t)$



b) sistema invariante no tempo

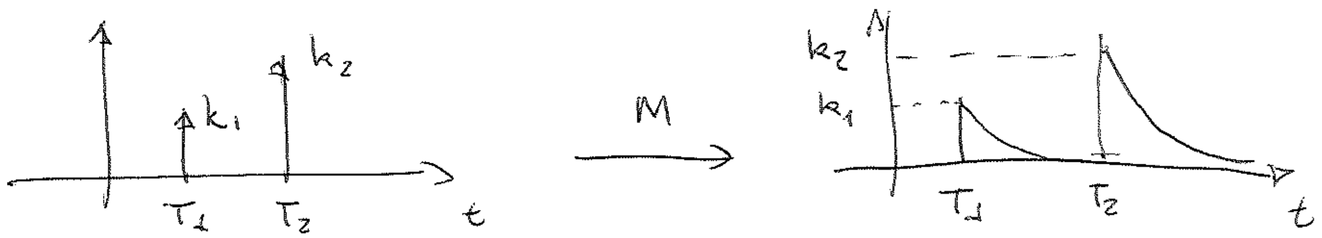
Se $h(t) = M[\delta(t)]$ então $M[\delta(t-T)] = h(t-T)$



c) sistema linear e invariante no tempo

Se $h(t) = M[\delta(t)]$ então

$$M[k_1 \delta(t-T_1) + k_2 \delta(t-T_2)] = k_1 h(t-T_1) + k_2 h(t-T_2)$$



d) superposição

Se $h(t) = M[\delta(t)]$ então

$$M\left[\lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \delta(t-nT) . T\right]$$

$$= \lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) . h(t-nT) . T$$

Resolvendo os limites tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

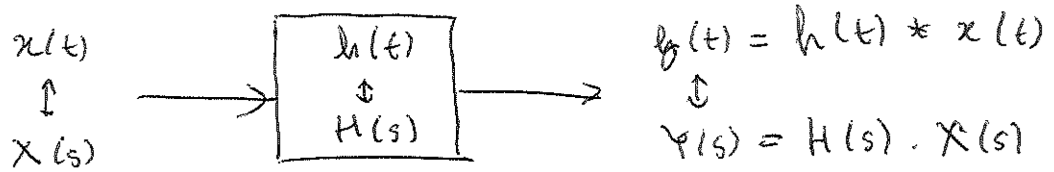
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t) = y(t)$$

A resposta $y(t)$ de um sistema linear e invariante no tempo a um sinal $x(t)$ é a convolução deste com a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema.

$$y(t) = M[x(t)] = h(t) * x(t)$$

6.3 Função de transferência

A função de transferência $H(s)$ de um sistema linear e invariante no tempo é a transformada de Laplace da resposta ao impulso do sistema considerando todas as condições iniciais nulas.



A função de transferência pode ser obtido pela razão entre a resposta e o estímulo no domínio da frequência complexa.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

6.4 Equação diferencial

Se o comportamento de um sistema linear e invariante no tempo pode ser regido por uma equação diferencial ordinária de ordem P com coeficientes constantes do tipo

$$\sum_{p=0}^{P} a_p \frac{d^p}{dt^p} y(t) = \sum_{p=0}^{P} b_p \frac{d^p}{dt^p} x(t)$$

com $a_P = 1$, então existe uma resposta ao impulso $h(t)$ para este sistema cuja função de transferência $H(s)$ correspondente é uma função racional de ordem P com os mesmos $2P+1$ coeficientes da equação diferencial.

$$\sum_{p=0}^{P} a_p s^p Y(s) = \sum_{p=0}^{P} b_p s^p X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{p=0}^{P} b_p s^p}{\sum_{p=0}^{P} a_p s^p} = \frac{b_P s^P + \cdots + b_1 s + b_0}{\underset{1}{\cancel{a_P}} s^P + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\sum_{p=0}^{P} a_p \frac{d^p}{dt^p} y(t) = \sum_{p=0}^{P} b_p \frac{d^p}{dt^p} x(t)$$

$$\updownarrow$$

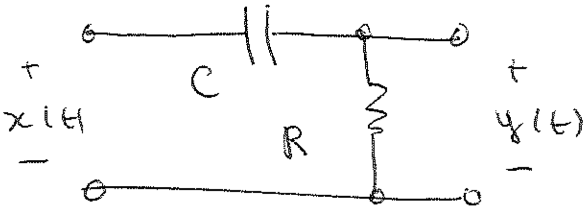
$$\sum_{p=0}^{P} a_p s^p Y(s) = \sum_{p=0}^{P} b_p s^p X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{p=0}^{P} b_p s^p}{\sum_{p=0}^{P} a_p s^p} = \frac{b_P s^P + \cdots + b_1 s + b_0}{\underset{1}{a_P} s^P + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Exercício 6.1

Obtenha a expressão para a resposta ao impulso h(t) dos sistemas abaixo.

a)



<u>iniciando no domínio t</u>

$$\frac{y(t)}{R} = C \frac{d}{dt}\left[x(t) - y(t)\right]$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

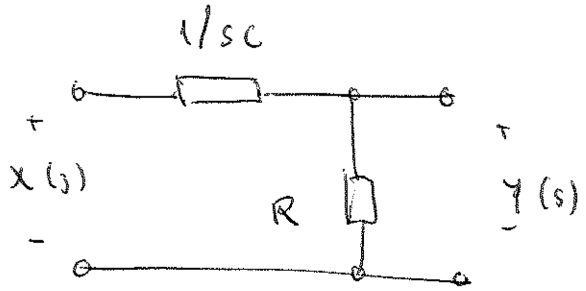
$$\updownarrow$$

$$sY(s) + \frac{1}{RC} Y(s) = s X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s + 1/RC} = 1 + \frac{-1/RC}{s + 1/RC}$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\, u(t)\, e^{-t/RC}$$

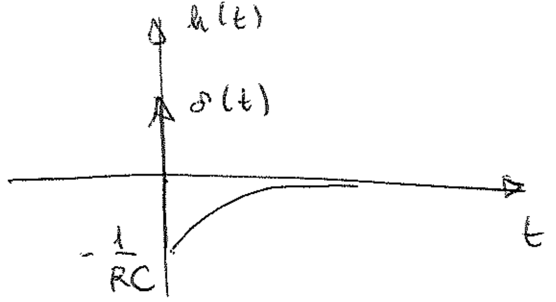
iniciando no domínio s



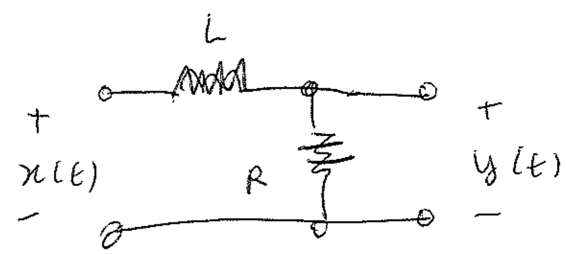
$$Y(s) = \frac{R}{R + 1/sC}\, X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R + 1/sC} \times \frac{s/R}{s/R} = \frac{s}{s + 1/RC}$$

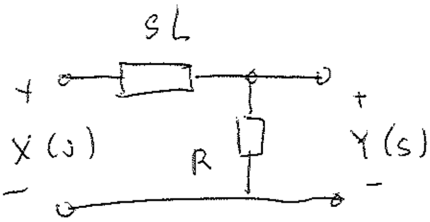
$$H(s) = 1 + \frac{-1/RC}{s + 1/RC} \Leftrightarrow h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\, u(t)\, e^{-t/RC}$$



b)



$\Leftrightarrow$



$$Y(s) = \frac{\cancel{R}\,\frac{1}{sC}}{R + \cancel{sL}\,\frac{1}{sC}}\, X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\cancel{R}\;1/sC}{R + \cancel{sL}\;1/sC} \times \frac{s/\cancel{R}}{s/\cancel{R}}$$

$$H(s) = \frac{\cancel{R/L}\;1/RC}{s + \cancel{R/L}\;1/RC} \Leftrightarrow h(t) = \frac{\cancel{R}}{R\cancel{C}}\, u(t)\, e^{-t\cancel{R}/RC}$$

6.5 Resposta em frequência

A transformada de Laplace não permite analisar os sistemas lineares e invariantes no tempo com sinais de duração infinita porque assume a condição $x(t) = 0$ para $t < 0$.

A transformad de Fourier resolve esta situação na modelagem matemática do sistema.

No caso específico de um sistema causal e estável, a transformada de Fourier da resposta ao impulso, denominada resposta em frequência, pode ser obtida a partir da função de transferência $H(s)$ fazendo-se $s = j2\pi f$.

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \updownarrow \\ X(f) \end{array} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} h(t) \\ \updownarrow \\ H(j2\pi f) \end{array}} \longrightarrow \begin{array}{l} y(t) = h(t) * x(t) \\ \quad\updownarrow \\ Y(f) = H(j2\pi f) \cdot X(f) \end{array}$$

a) sistema causal

Para ser fisicamente realizável, a resposta ao impulso só pode ocorrer a partir da aplicação deste, portanto $h(t) = 0$ para $t < 0$.

Tal sistema é denominado causal e a existência da função de transferência $H(s)$ garante sempre esta condição.

b) sistema estável

Um sistema é dito estável quando $\lim_{t \to \infty} h(t) = 0$. Neste caso, os polos λ_p da função racional $H(s)$ devem respeitar a condição

$$Re(\lambda_p) < 0$$

de tal forma que $H(s)$ exista ~~em~~ quando $Re(s) = 0$.

c) resposta em frequência

$H(s)\big|_{s=j2\pi f} = H(j2\pi f)$ é uma função complexa (hermitiana) da variável real f, portanto

$$H(j2\pi f) = H(-j2\pi f)^* = |H(j2\pi f)|\, e^{j \angle H(j2\pi f)}$$

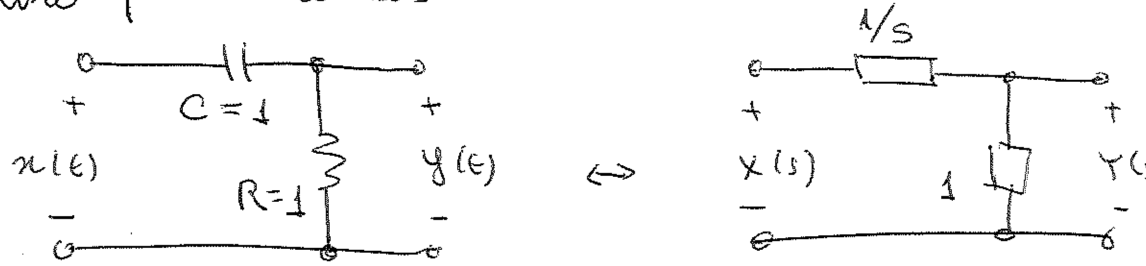
$$|H(j2\pi f)| = |H(-j2\pi f)|$$
$$\angle H(j2\pi f) = - \angle H(j2\pi f)$$

As funções $|H(j2\pi f)|$ e $\angle H(j2\pi f)$ são denominadas respostas em frequência do ganho (ou magnitude) e da fase, respectivamente.

Exercício 6.2

Calcule as respostas em frequência do ganho e da fase dos sistemas abaixo e desenhe seus respectivos gráficos contendo curvas assintóticas.

a) circuito diferenciador/ ~~fisicamente realizável~~ aproximado
filtro passa-altas



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + 1/s} \times \frac{s}{s} = \frac{s}{s+1}$$

$$H(j2\pi f) = \frac{j2\pi f}{j2\pi f + 1}$$

$$|H(j2\pi f)| = \frac{|j2\pi f|}{|j2\pi f + 1|} = \frac{\sqrt{(2\pi f)^2}}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 1^2}} = \frac{2\pi |f|}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 1}}$$

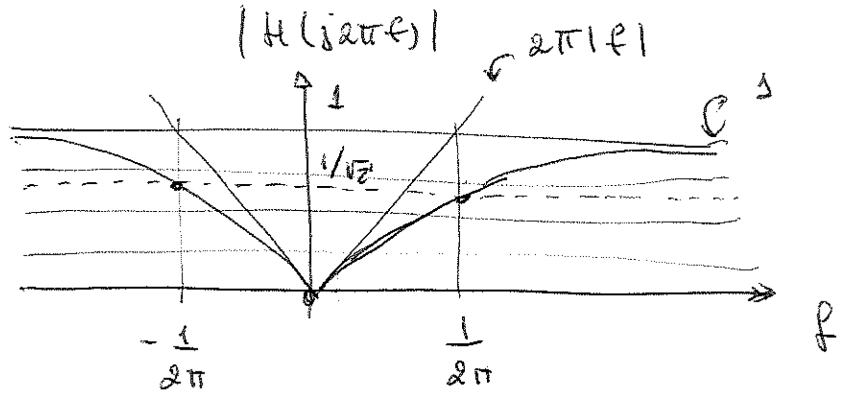
$$\angle H(j2\pi f) = \arctan\left(\frac{2\pi f}{0}\right) - \arctan\left(\frac{2\pi f}{1}\right)$$

$$\angle H(j2\pi f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan(2\pi f), & f < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan(2\pi f), & f > 0 \end{cases}$$

assintotas de $|H(j2\pi f)|$

$$(2\pi f)^2 << 1 \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx 2\pi|f|$$

$$(2\pi f)^2 >> 1 \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx 1$$



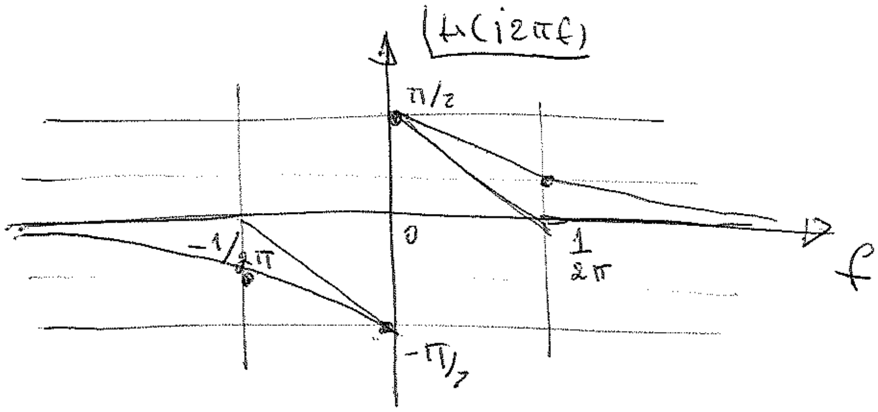
$$(2\pi f)^2 = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \text{ e } |H(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

assintotas de $\angle H(j2\pi f)$

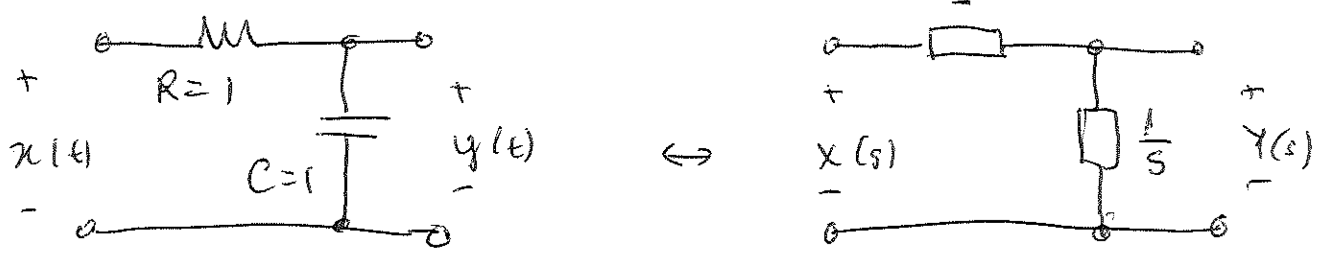
$$(2\pi f)^2 >> 1 \Rightarrow \angle H(j2\pi f) \approx 0$$

$$(2\pi f)^2 << 1 \Rightarrow \angle H(j2\pi f) \approx \begin{cases} -\pi/2, & f<0 \\ \pi/2, & f>0 \end{cases}$$

$$(2\pi f)^2 = 1 \Rightarrow \angle H(j2\pi f) = \begin{cases} -\pi/4 \\ \pi/4 \end{cases}$$



b) circuito integrador / filtro passa-baixas.



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/s}{1 + 1/s} \times \frac{s}{s} = \frac{1}{s+1}$$

$$H(j2\pi f) = \frac{1}{j2\pi f + 1}$$

$$|H(j2\pi f)| = \frac{|1|}{|j2\pi f + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 1}}$$

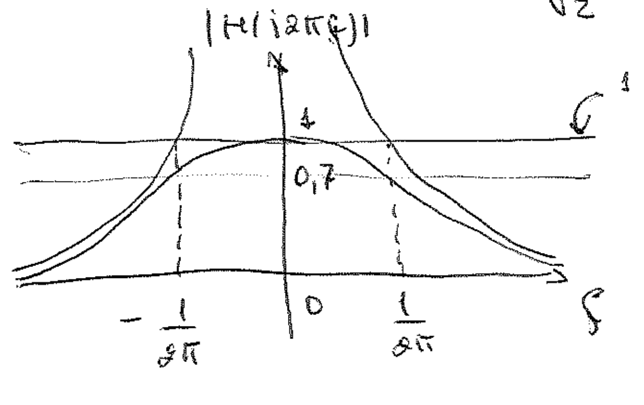
$$\angle H(j2\pi f) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) - \arctan\left(\frac{2\pi f}{1}\right) = -\arctan(2\pi f)$$

assíntotas de $|H(j2\pi f)|$

$$(2\pi f)^2 << 1 \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx \cancel{\frac{1}{2\pi|f|}} \quad 1$$

$$(2\pi f)^2 >> 1 \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx \frac{1}{2\pi|f|}$$

$$(2\pi f)^2 = 1 \Rightarrow |H(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

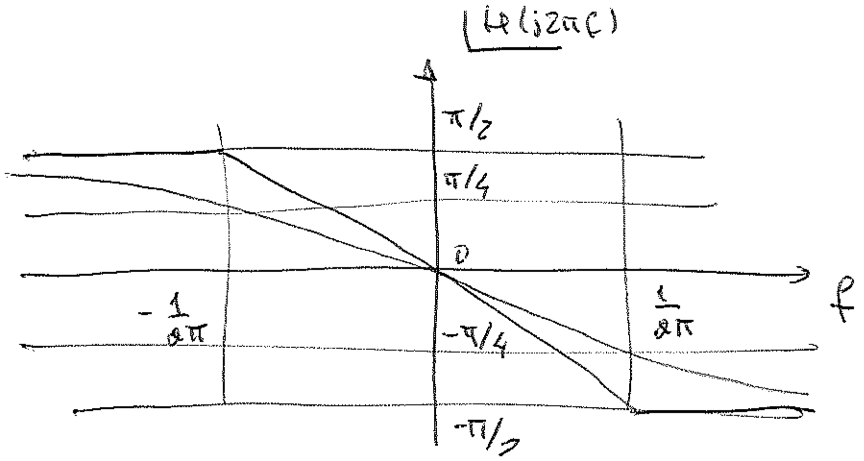


assíntotas de $\angle H(j2\pi f)$

$$(2\pi f)^2 << 1 \Rightarrow \angle H(j2\pi f) \approx 0$$

$$(2\pi f)^2 >> 1 \Rightarrow \angle H(j2\pi f) \approx \begin{cases} \pi/2 & , f<0 \\ -\pi/2 & , f>0 \end{cases}$$

$$(2\pi f)^2 = 1 \Rightarrow \angle H(j2\pi f) = \begin{cases} \pi/4 & , f<0 \\ -\pi/4 & , f>0 \end{cases}$$



6.6 Representação no espaço de estados

A representação no espaço de estados usa o equacionamento matricial no modelo matemático de um sistema linear e invariante no tempo com as seguintes vantagens:

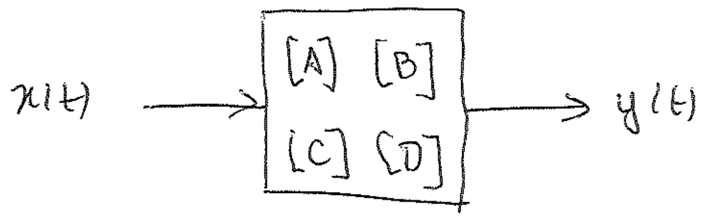
- organização dos coeficientes em matrizes
- acesso ao comportamento interno do sistema
- fácil adaptação para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas
- adaptável a sistemas não lineares e ~~...~~ variantes no tempo

a) domínio do tempo

~~Um sistema governado por~~ Uma equação diferencial ordinária de ordem P com coeficientes constantes pode ser transformada num sistema de P equações ordinárias de primeira ordem na forma (P=3)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

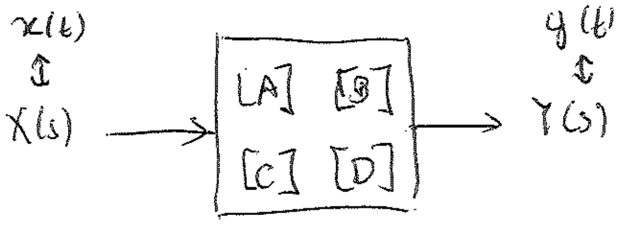
onde $q_1(t)$, $q_2(t)$ e $q_3(t)$ são funções auxiliares denominadas variáveis de estado, as quais representam o comportamento interno de um sistema com memória.
A primeira equação é denominada equação de estados, e a segunda, equação de saída.



b) domínio da frequência complexa

Através da transformada de Laplace. obtém-se o ~~sist~~ equacionamento no domínio da frequência complexa, considerando que $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$:

$$
\begin{cases}
s\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} X(s) \\
Y(s) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix} X(s)
\end{cases}
$$



c) função de transferência.

No domínio da frequência complexa é possível eliminar algebricamente o vetor de estados e obter a função de transferência.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} X(s)$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}$$

Neste caso,
$H(s)$ ~~seria~~ é uma função racional em s de ordem P cujo numerador tem grau menor que o denominador se $D_1 = 0$, ou igual se $D_1 \neq 0$.

d) equacionamento de circuitos elétricos

1) usar como variáveis de estado:
   - correntes elétricas em indutores $i_L(t)$, $I_L(s)$
   - tensões elétricas em capacitores $v_C(t)$, $V_C(s)$

2) o sinal de saída pode ser uma variável de estado, mas o sinal de entrada não pode.

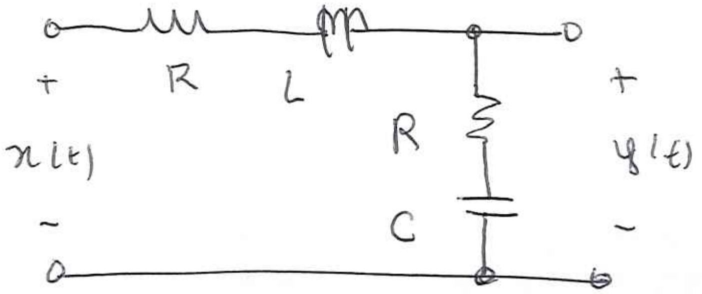
3) usar as impedâncias no domínio s considerando as condições iniciais nulas e as leis circuitais envolvendo:
   - tensões elétricas nos indutores $sL\,I_L(s)$
   - correntes elétricas nos capacitores $sC\,V_C(s)$

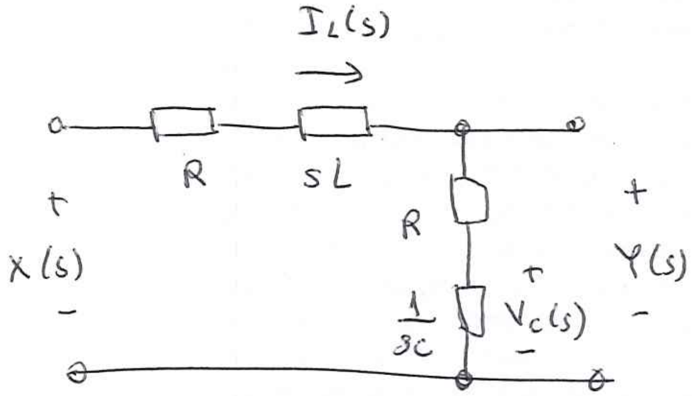
4) a equação de saída não pode conter s, sendo uma combinação linear das correntes nos indutores e tensões nos capacitores e do sinal de entrada.

~~Exemplo~~ Exercício 6.3

Encontre as matrizes [A], [B], [C] e [D] das representações no espaço de estados dos sistemas abaixo e obtenha as expressões para as respectivas funções de transferência.

a)





$$\begin{cases} X(s) = R\,I_L(s) + \underline{sL\,I_L(s)} + R\,I_L(s) + V_c(s) \\ \underline{sC\,V_c(s)} = I_L(s) \\ Y(s) = R\,I_L(s) + V_c(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,I_L(s) = -\dfrac{2R}{L}\,I_L(s) - \dfrac{V_c(s)}{L} + \dfrac{X(s)}{L} \\ s\,V_c(s) = \dfrac{1}{C}\,I_L(s) \\ Y(s) = R\,I_L(s) + V_c(s) \end{cases}$$

$$s \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & -1/L \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_c(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} X(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_c(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} X(s)$$

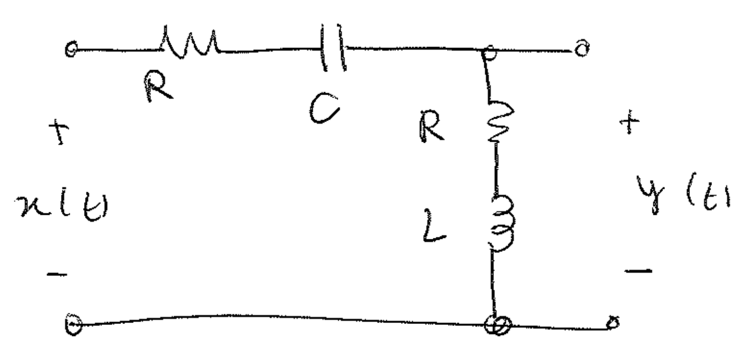
$$H(s) = \begin{bmatrix} R & 1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & -1/L \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

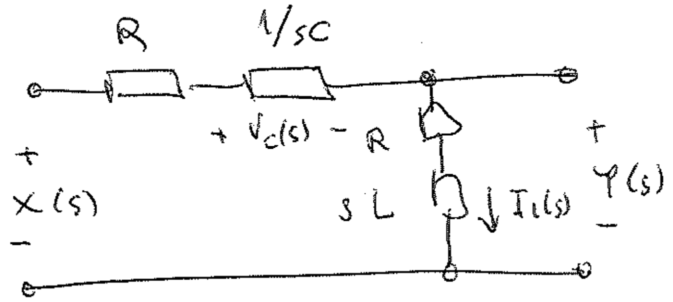
$$H(s) = \begin{bmatrix} R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 2R/L & 1/L \\ -1/C & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{s\,(s+2R/L) + 1/LC} \begin{bmatrix} R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1/L \\ 1/C & s+2R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{\begin{bmatrix} R & 1 \end{bmatrix}}{s^2 + s\,2R/L + 1/LC} \begin{bmatrix} s/L \\ 1/LC \end{bmatrix} = \frac{sR/L + 1/LC}{s^2 + s\,2R/L + 1/LC}$$

b)





$$X(s) = R\,I_L(s) + V_c(s) + R\,I_L(s) + \underline{sL\,I_L(s)}$$

$$sC\,V_c(s) = I_L(s)$$

$$-Y(s) + X(s) = R\,I_L(s) + V_c(s)$$

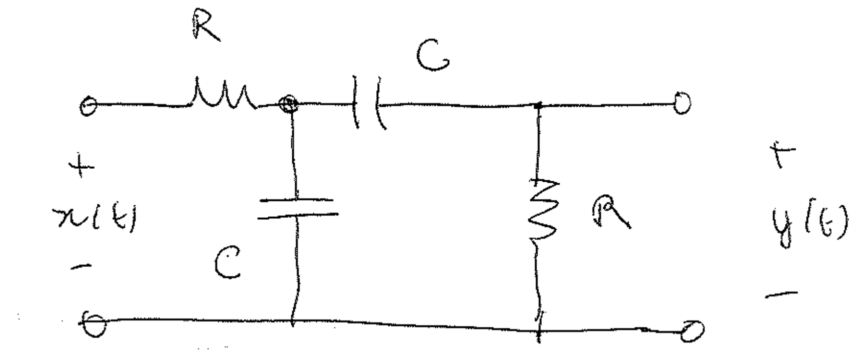
$$s\,I_L(s) = -\frac{2R}{L} I_L(s) - \frac{1}{L} V_c(s) + \frac{1}{L} X(s)$$

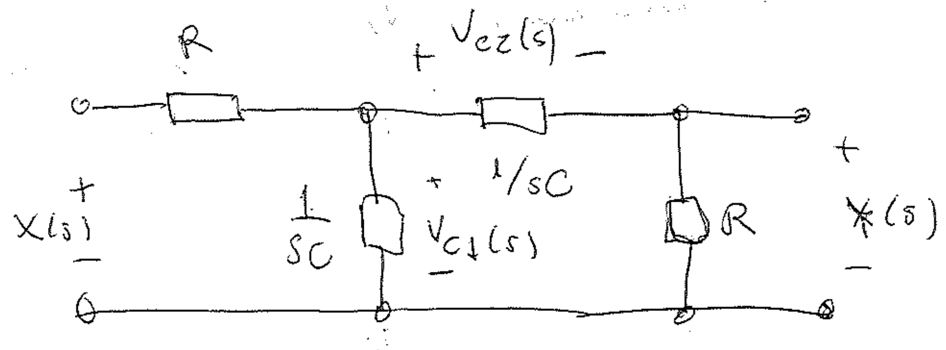
$$s\,V_c(s) = \frac{1}{C} I_L(s)$$

$$Y(s) = -R\,I_L(s) - V_c(s) + X(s)$$

$$\begin{cases} s\begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_c(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} X(s) \\ Y(s) = \begin{bmatrix} -R & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_c(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} X(s) \end{cases}$$

b)





$$sC\,V_{C2}(s) = \frac{V_{C1}(s) - V_{C2}(s)}{R} = \frac{Y(s)}{R}$$

$$\frac{X(s) - V_{C1}(s)}{R} = sC\,V_{C1}(s) + sC\,V_{C2}(s)$$

$$= sC\,V_{C1}(s) + \frac{V_{C1}(s) - V_{C2}(s)}{R}$$

$$Y(s) = V_{C1}(s) - V_{C2}(s)$$

$$s\,V_{C1}(s) = -\frac{2}{RC}V_{C1}(s) + \frac{1}{RC}V_{C2}(s) + \frac{1}{RC}X(s)$$

$$s\,V_{C2}(s) = \frac{1}{RC}V_{C1}(s) - \frac{1}{RC}V_{C2}(s)$$

$$Y(s) = V_{C1}(s) - V_{C2}(s)$$

$$s\begin{bmatrix} V_{C1}(s) \\ V_{C2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & +\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{C1}(s) \\ V_{C2}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} X(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{C1}(s) \\ V_{C2}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} X(s)$$

$$\cancel{H(s) = [1\ \ -1]\left(s \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & \end{bmatrix}\right.}$$

$$H(s) = [1\ \ -1] \begin{bmatrix} s+2/RC & -1/RC \\ -1/RC & s+1/RC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} + [0]$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+\frac{2}{RC})(s+1/RC) - (1/RC)^2}$$

$$\cdot\ [1\ \ -1] \underbrace{\begin{bmatrix} s+1/RC & +1/RC \\ 1/RC & s+2/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$H(s) = \frac{1/RC}{(s+\frac{2}{RC})(s+1/RC) - (1/RC)^2} \ [1\ \ -1] \begin{bmatrix} s+1/RC \\ 1/RC \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{RC} \ \frac{s+1/RC - 1/RC}{(s+2/RC)(s+1/RC) - (1/RC)^2}$$

$$H(s) = \frac{s/RC}{s^2 + s\,3/RC + 1/R^2C^2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2RC}$$

d) frações parciais com polos complexos

$\lambda_1 = -a + jb = \lambda_2^*$, $c_1 = c_r + jc_i = c_2^*$

$$s\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r \\ c_i \\ c_3 \end{bmatrix} X(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \end{bmatrix} X(s)$$

e) transposição

Todo sistema linear e invariante no tempo com uma entrada e uma saída tem a forma equivalente transposta com as variáveis de estado $Q_p(s)$ substituídas por $Q_p'(s)$.

$$s\left[Q'(s)\right] = \left[A\right]^T\left[Q'(s)\right] + \left[C\right]^T X(s)$$

$$Y(s) = \left[B\right]^T\left[Q'(s)\right] + \left[D\right] X(s)$$

f) similaridade

Se existe uma matriz de transformação $[T]$ tal quee $[Q(s)] = [T][Q'(s)]$ e $[Q'(s)] = [T]^{-1}[Q(s)]$, então

$$s\left[Q'(s)\right] = \left[A'\right]\left[Q'(s)\right] + \left[B'\right] X(s)$$

$$Y(s) = \left[C'\right]\left[Q'(s)\right] + \left[D'\right] X(s)$$

com $[A'] = [T]^{-1}[A][T]$, $[B'] = [T]^{-1}[B]$

$[C'] = [C][T]$ e $[D'] = [D]$.

Exercício. 6.4

Encontre as matrizes [A], [B], [C] e [D] para as formas canônicas da representação no espaço de estados do sistema cuja função de transferência é

$$H(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 + 2s + 1}$$

e comprove o resultado recalculando H(s).

a) função racional

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \Rightarrow \begin{matrix} b_2 = 1, & b_1 = 0; & b_0 = -2 \\ a_1 = 2, & a_0 = 1 & \end{matrix}$$

$$s \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_2 a_0 \\ b_1 - b_2 a_1 \end{bmatrix} X(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \end{bmatrix} X(s)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = [C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B]+[D]$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} + [1]$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)+1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}}_{[1 \;\; s]}\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} + [1]$$

$$H(s) = \frac{-3-2s}{s^2+2s+1} + 1 = \frac{-3-2s+s^2+2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{s^2-2}{s^2+2s+1}$$

b) frações parciais

$$(s^2+2s+1) = 0 \Rightarrow s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 = \lambda_1 = \lambda_2$$

$$c_1 = \left[\cancel{(s+1)^2}\,\frac{-3-2s}{\cancel{(s+1)^2}}\right]_{s=-1} = -1$$

$$c_2 = \left[\frac{d}{ds}(-3-2s)\right]_{s=-1} = -2$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [D] = [1]$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & s+1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{-1 - 2s - 2}{(s+1)^2} + 1$$

$$H(s) = \frac{-3 - \cancel{2s} + s^2 + \cancel{2s} + 1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s^2 - 2}{s^2 + 2s + 1}$$