2 aulas

Capítulo 8 Sistemas de Tempo Discreto

8.1. Definição

Um sistema de tempo discreto é um modelo matemático que estabelece a correspondência entre sinais de estímulo e de resposta de tempo discreto.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{M} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = M\{x[n]\}$$

8.2. Resposta ao impulso e função de transferência.

Um sistema linear e invariante no tempo discreto pode ser caracterizado pela resposta ao impulso no tempo discreto $h[n]$ ou pela sua função de transferência $H(z)$ que é a transformada z da resposta ao impulso.

$$\begin{array}{c} x[n] \\ \updownarrow \\ X(z) \end{array} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} h[n] \\ \updownarrow \\ H(z) \end{array}} \longrightarrow \begin{array}{c} y[n] = h[n] * x[n] \\ \updownarrow \\ Y(z) = H(z) \cdot X(z). \end{array}$$

8.3 Equação a diferenças

Se o sistema pode ter seu comportamento governado por uma equação a diferenças de ordem P com coeficientes constantes do tipo

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{P} a_k \, y[n-k] + \sum_{k=0}^{P} b_k \, x[n-k] \; ;$$

então sua função de transferência é uma função racional em z, pois

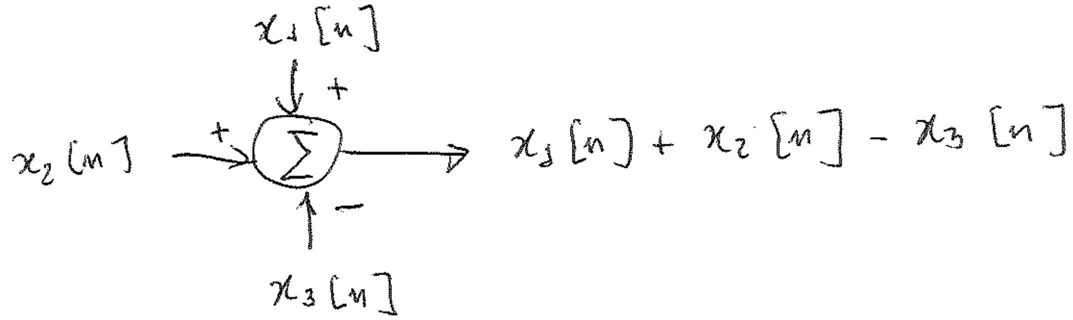
$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k} \, Y(z) + \sum_{k=0}^{P} b_k z^{-k} \, X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{p=0}^{P} b_p z^{-k}}{1 + \sum_{p=1}^{P} a_p z^{-k}} \times \frac{z^P}{z^P}$$

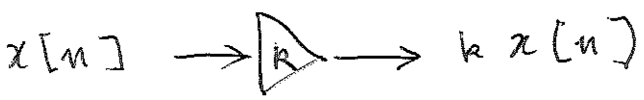
$$H(z) = \frac{b_0 z^P + b_1 z^{P-1} + \dots + b_{P-1} z + b_P}{z^P + a_1 z^{P-1} + \dots + a_{P-1} z + a_P}$$

8.4 Diagrama de blocos

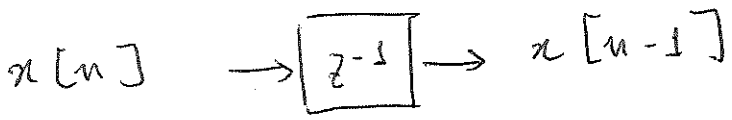
somador



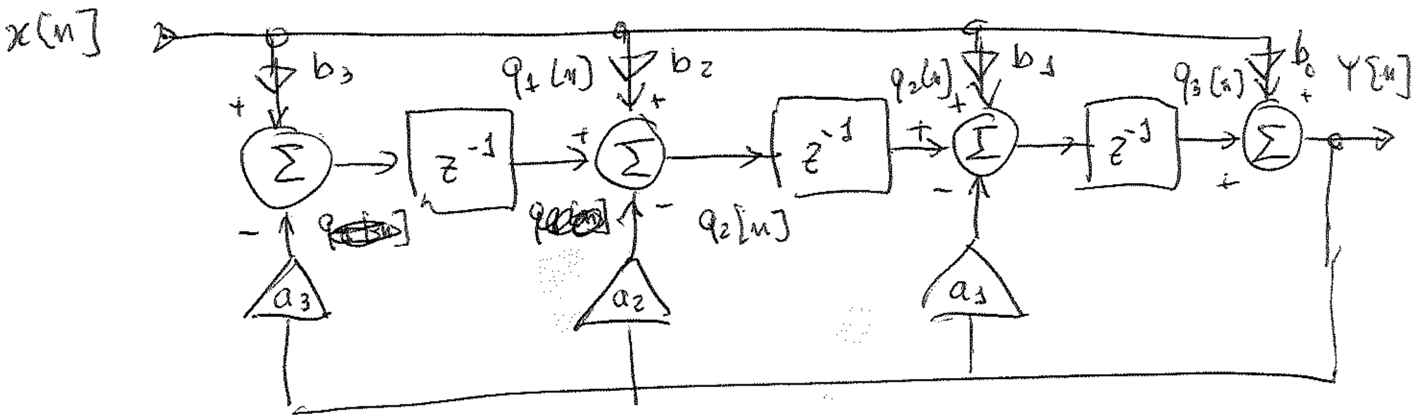
produto por constante



registrador



forma canônica



$$q_1[n] = b_3\, x[n-1] - a_3\, y[n-1]$$

$$q_2[n] = b_2\, x[n-1] - a_2\, y[n-1] + q_1[n-1]$$

$$q_3[n] = b_1\, x[n-1] - a_1\, y[n-1] + q_2[n-1]$$

$$y[n] = b_0\, x[n] + q_3[n]$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2\, x[n-2] + b_3 x[n-3]$$
$$- a_1\, y[n-1] - a_2\, y[n-2] - a_3\, y[n-3]$$

$$y[n] = -\sum_{p=1}^{3} a_p\, y[n-p] + \sum_{p=0}^{3} b_p\, x[n-p]$$

8.5. Resposta em frequência

No caso específico de um sistema causal e estável, a transformada de Fourier da resposta ao impulso no tempo discreto, também denominada resposta em frequência, pode ser obtida a partir da função de transferência $H(z)$ fazendo-se $z = e^{j\omega}$.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} h[n] \\ \updownarrow \\ H(e^{j\omega}) \end{array}} \longrightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

$$X(\omega) \qquad\qquad Y(\omega) = H(e^{j\omega})\, X(\omega)$$

a) sistema causal

Se um sistema é causal, então $h[n] = 0$ para $n < 0$, portanto a ROC de $H(z)$ é todo o plano complexo z ou o exterior de uma circunferência e necessariamente deve incluir $|z| = \infty$.

Se $H(z)$ é uma função racional em z, o numerador não pode ter grau maior que o denominador.

b) sistema estável

Um sistema é dito estável quando $\lim_{n\to\infty} h[n] = 0$. Neste caso, os polos λ_p da função racional $H(z)$ devem respeitar a condição

$$|\lambda_p| < 1$$

de tal forma que a circunferência $|z| = 1$ esteja na ROC de $H(z)$.

c) resposta em frequência

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|\, e^{j\underline{/H(e^{j\omega})}}$$

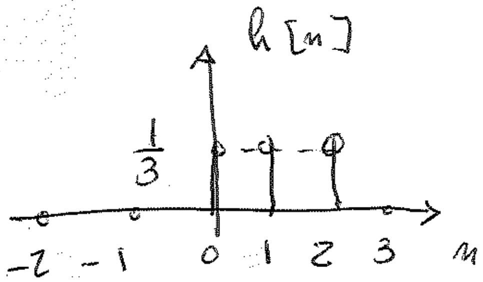
$|H(e^{j\omega})|$ é o ganho da resposta em frequência e $\underline{/H(e^{j\omega})}$ é a fase.

Exercício 8.1

Para os filtros cujas respostas ao impulso encontram-se abaixo, desenhe o diagrama ~~dos~~ blocos contendo os valores numéricos correspondentes e calcule o ganho da resposta em frequência.

a) FIR (finite impulse response)

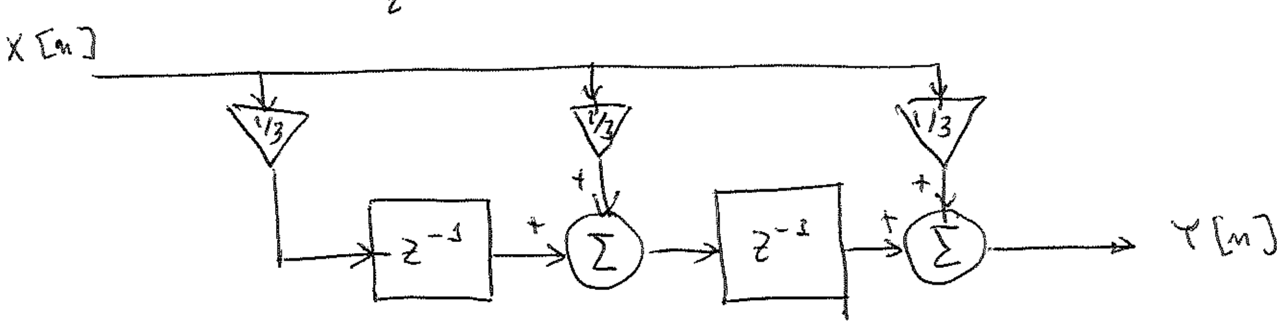
$$h[n] = \frac{1}{3} r_1[n-1]$$



$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & |n-1| \leq 1 \\ 0, & |n-1| > 1 \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} r_1[n-1] \cdot z^{-n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right), \; |z| > 0$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}}{z^2} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

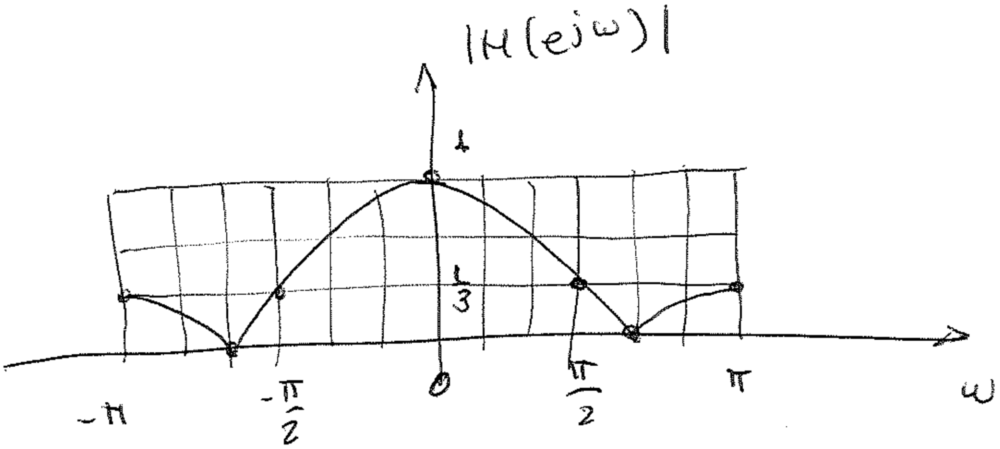


$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\,\frac{e^{j2\omega}+e^{j\omega}+1}{e^{j2\omega}} = \frac{1}{3}\,\frac{\cos(2\omega)+\cos(\omega)+1+j\left[\mathrm{sen}(2\omega)+\mathrm{sen}(\omega)\right]}{\cos(2\omega)+j\,\mathrm{sen}(2\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{\left[\cos(2\omega)+\cos(\omega)+1\right]^2+\left[\mathrm{sen}(2\omega)+\mathrm{sen}(\omega)\right]^2}}{\sqrt{\cos^2(2\omega)+\mathrm{sen}^2(2\omega)}}$$

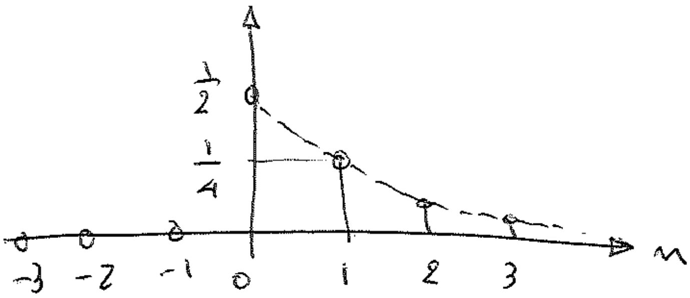
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3}\sqrt{\left[\cos^2(\omega)-\mathrm{sen}^2(\omega)+\cos(\omega)+\cos^2(\omega)+\mathrm{sen}^2(\omega)\right]^2 \ldots}$$
$$\overline{\ldots + \left[2\,\mathrm{sen}(\omega)\cos(\omega)+\mathrm{sen}(\omega)\right]^2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3}\,|2\cos(\omega)+1|$$



b) IIR (infinite impulse response)

$$h[n] = \frac{2^{-n}}{2}\, u[n]$$



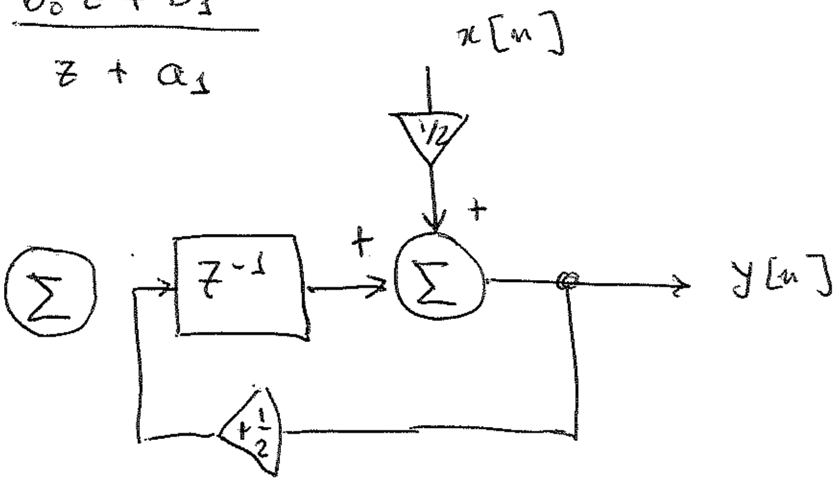
$$u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{2z}{2z-1}, \quad |2z| > 1$$

$$h[n] \leftrightarrow \frac{1}{2}\,\frac{2z}{2z-1}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{z/2}{z-1/2}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad \text{inclui } |z| = \infty \text{ e } |z| = 1$$

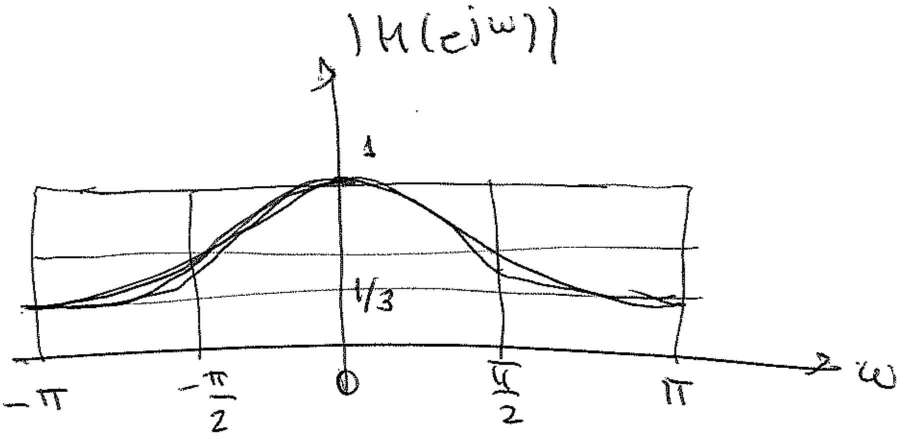
$$H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1}$$



$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos(\omega)+j\,\mathrm{sen}(\omega)}{\cos(\omega)-1/2+j\,\mathrm{sen}(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\omega) - \cos(\omega) + 1/4 + \mathrm{sen}^2(\omega)}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos(\omega)}}$$



8.6. Representação no espaço de estados.

a) domínio n

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \\ q_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & \bar{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \end{bmatrix} x[n]$$

b) domínio z.

$$z \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(z) \\ \bar{Q}_2(z) \\ \bar{Q}_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & \ddots & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(z) \\ \bar{Q}_2(z) \\ \bar{Q}_3(z) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{pmatrix} \bar{X}(z)$$

$$\bar{Y}(z) = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & \bar{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(z) \\ \bar{Q}_2(z) \\ \bar{Q}_3(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \end{bmatrix} \bar{X}(z)$$

c) função de transferência.

$$\begin{matrix} x[n] \\ \updownarrow \\ X(z) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} [\bar{A}] & [\bar{B}] \\ [\bar{C}] & [\bar{D}] \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y[n] = h[n] * x[n] \\ \updownarrow \\ Y(z) = H(z) \cdot X(z) \end{matrix}$$

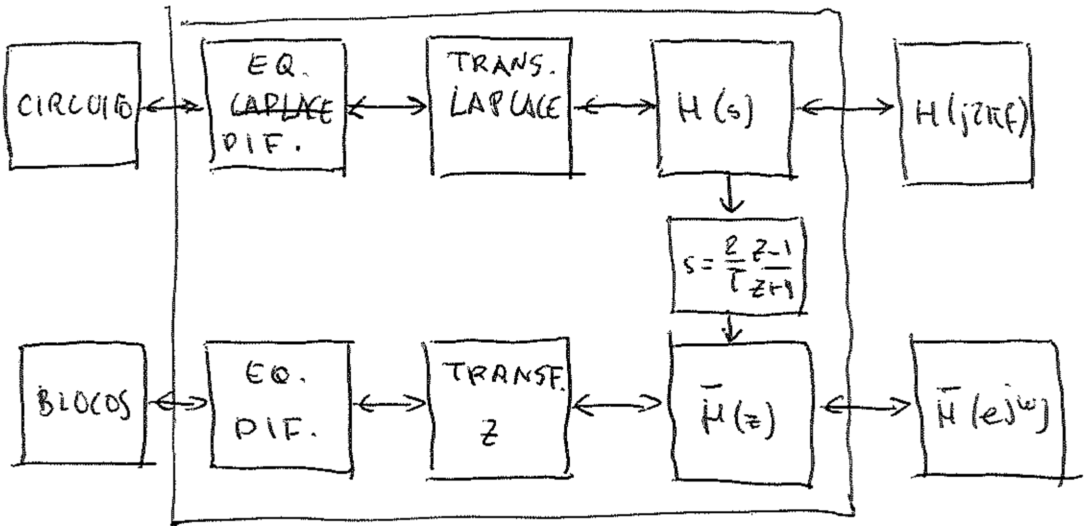
$$H(z) = [\bar{C}] \left(z[I] - [\bar{A}] \right)^{-1} [\bar{B}] + [\bar{D}]$$

8.7 Representação canônica.

$$H(z) = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

$$z \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(z) \\ \bar{Q}_2(z) \\ \bar{Q}_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(z) \\ \bar{Q}_2(z) \\ \bar{Q}_3(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 - b_0 a_3 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \bar{X}(z)$$

$$\bar{Y}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(z) \\ \bar{Q}_2(z) \\ \bar{Q}_3(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix} \bar{X}(z).$$



ESPAÇO DE ESTADOS.

(17)

$$[\bar{A}] = \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{2RC}\right)^{-1} \left(\frac{2}{T} - \frac{1}{2RC}\right) = \frac{\frac{2}{T} - \frac{1}{RC}}{\frac{2}{T} + \frac{1}{RC}} = \frac{19}{21}$$

$$[\bar{B}] = \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{2RC}\right)^{-1} [B] = \frac{-\frac{1}{RC}}{\frac{2}{T} + \frac{1}{2RC}} = \frac{-2}{21}$$

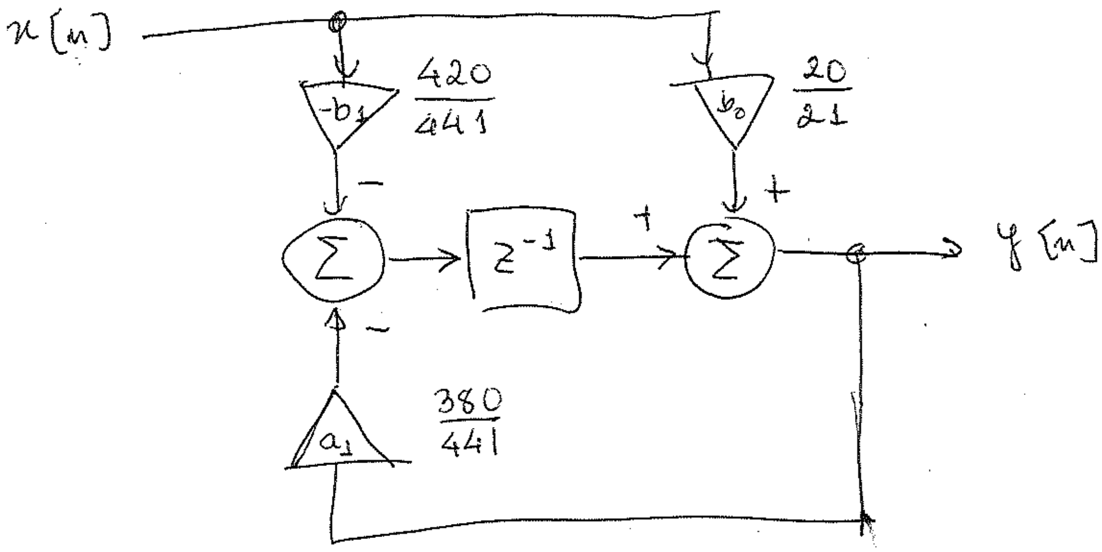
$$[\bar{C}] = \frac{1}{T} \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{2RC}\right)^{-1} \cancel{4} = \frac{4/T}{\frac{2}{T} + \frac{1}{2RC}} = \frac{40}{21}$$

$$[\bar{D}] = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{2RC}\right)^{-1} \left(-\frac{1}{RC}\right) + 1 = \frac{-\frac{1}{2RC}}{\frac{2}{T} + \frac{1}{2RC}} + 1 = \frac{20}{21}$$

$$\begin{cases} q[n+1] = \frac{19}{21} q[n] - \frac{1}{21} x[n] \\ y[n] = \frac{40}{21} q[n] + \frac{20}{21} x[n] \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{40}{21} \left(z - \frac{19}{21}\right)^{-1} \frac{\overset{-2}{\cancel{20}}}{21} + \frac{20}{21}$$

$$H(z) = \frac{-\frac{40}{441}}{z - \frac{19}{21}} + \frac{20}{21} = \frac{\frac{20}{21} z - \frac{420}{441}}{z - \frac{380}{441}} = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1}$$



que pode ser transformada em

$$\begin{cases} z\left[\bar{Q}(z)\right] = [\bar{A}]\left[\bar{Q}(z)\right] + [\bar{B}]\,\bar{X}(z) \\ \bar{Y}(z) = [\bar{C}]\left[\bar{Q}(z)\right] + [\bar{D}]\,\bar{X}(z) \end{cases}$$

ao fazer

$$X(s) = X\left(\frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\right) = \bar{X}(z)$$

$$Y(s) = Y\left(\frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\right) = \bar{Y}(z)$$

$$\frac{2}{z+1}\,Q(s) = \frac{2}{z+1}\,Q\left(\frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\right) = \bar{Q}(z)$$

logo obtém-se

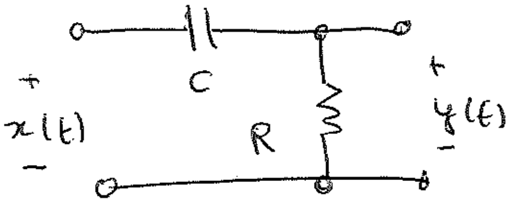
$$\begin{cases} \frac{z-1}{T}\left[\bar{Q}(z)\right] = \frac{z+1}{2}\,[A]\left[\bar{Q}(z)\right] + [B]\,\bar{X}(z) \\ Y(z) = \frac{z+1}{2}\,[C]\left[\bar{Q}(z)\right] + [D]\,\bar{X}(z) \end{cases}$$

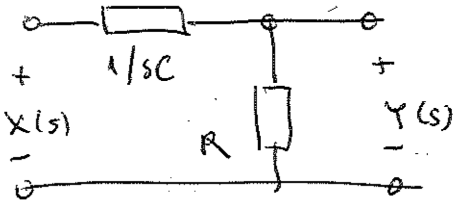
que fornece

$$\begin{cases} [\bar{A}] = \left(\frac{1}{T}[I] - \frac{1}{2}[A]\right)^{-1}\left(\frac{1}{T}[I] + \frac{1}{2}[A]\right) \\ [\bar{B}] = \left(\frac{1}{T}[I] - \frac{1}{2}[A]\right)^{-1}[B] \\ [\bar{C}] = \frac{1}{T}[C]\left(\frac{1}{T}[I] - \frac{1}{2}[A]\right)^{-1} \\ [\bar{D}] = \frac{1}{2}[C]\left(\frac{1}{T}[I] - \frac{1}{2}[A]\right)^{-1}[B] + [D] \end{cases}$$

Exercício 8.2.

Encontre as matrizes $[\bar{A}]$, $[\bar{B}]$, $[\bar{C}]$ e $[\bar{D}]$ que aproximam no tempo discreto o comportamento do sistema de tempo contínuo abaixo ~~para $T = \frac{RC}{10}$~~ e desenhe o diagrama d~~as~~ blocos com os valores numéricos correspondentes considerando $T = \frac{RC}{10}$.





$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R + 1/sC}$$

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC} = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$$

$$\begin{cases} s\,Q(s) = -a_0\,Q(s) + (b_0 - b_1 a_0)\,X(s) \\ Y(s) = 1 \cdot Q(s) + b_1\,X(s) \end{cases}$$

$$[A] = \left[-\frac{1}{RC}\right], \quad [B] = \left[-\frac{1}{RC}\right],$$

$$[C] = [1], \quad [D] = [1]$$